

AUTOMORPHISMEN
NILPOTENTER LOKALKOMPAKTER
GRUPPEN

von
Rudolf Albert
aus Nürnberg

1981 № 300

AUTOMORPHISMEN NILPOTENTER LOKALKOMPAKTER GRUPPEN

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Rudolf Albert
aus Nürnberg

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 18. Mai 1981

Vorsitzender der Promotionskommission:

Prof. Dr. H. Wegener

Erstberichterstatter: Professor Dr. P. Plaumann

Zweitberichterstatter: Professor Dr. K. Strambach

I n h a l t

	Seite
<u>Finleitung</u>	i
<u>I Notationen, Grundbegriffe und technische Lemmata</u>	1
§ 1 Abbildungsgruppen und ihre Topologie	3
§ 2 Derivationen und Module	5
§ 3 Einige technische Lemmata	7
<u>II Nilpotente Liealgebren</u>	14
§ 1 Derivationen nilpotenter Liealgebren	14
§ 2 Beispiele	19
§ 3 Extraspezielle Liealgebren	25
<u>III Zusammenhängende Gruppen</u>	30
§ 1 Struktur nilpotenter zusammenhängender Gruppen	31
§ 2 Homomorphismen zusammenhängender Gruppen	34
§ 3 Automorphismen zusammenhängender Gruppen	40
§ 4 Beispiele	51
§ 5 Extraspezielle Gruppen	54
§ 6 Folgerungen	63
<u>IV Totalunzusammenhängende Gruppen</u>	65
§ 1 Struktur und elementare Eigenschaften von pro-p-Gruppen	65
§ 2 Homomorphismen abelscher, torsionsfreier, kompakter pro-p-Gruppen	69
§ 3 Automorphismen kompakter pro-p-Gruppen	75
§ 4 Extraspezielle kompakte Gruppen	81
Literaturverzeichnis	90
Lebenslauf	93



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

In dieser Arbeit wird versucht, aus der topologischen und algebraischen Struktur einer lokalkompakten Gruppe G auf die Struktur von $\text{Aut } G$, der Gruppe der stetigen und offenen Automorphismen von G , zu schließen und umgekehrt. Braconnier [1] hat auf $\text{Aut } G$ eine Topologie definiert, die diese Gruppe zu einer topologischen Gruppe macht. Mit den topologischen Eigenschaften von $\text{Aut } G$ beschäftigten sich bereits mehrere Autoren (z.B. [2], [8], [11], [12], [13] und [25]). Dagegen wurde bislang kaum untersucht, welchen Einfluß die Nilpotenz von G auf $\text{Aut } G$ hat. Ziel dieser Arbeit ist es, Ergebnisse für diskrete nilpotente Gruppen zu modifizieren und sie auf topologische Gruppen zu übertragen.

Die erste Frage ist, ob äußere Automorphismen, d.h. Automorphismen, die keine Konjugationen sind, existieren. Gaschütz zeigte 1965 und 1966 ([6] und [7]), daß diskrete, endliche, nicht-abelsche p -Gruppen äußere Automorphismen besitzen, und Zalesskii [26] verallgemeinerte dieses Resultat für nicht-endliche p -Gruppen. Dagegen gibt es Beispiele von torsionsfreien, nilpotenten Gruppen, welche nur innere Automorphismen zulassen; siehe Heineken [9] und Zalesskii [27]. Das allgemeinste Resultat für torsionsfreie, nilpotente Gruppen stammt aus einer unveröffentlichten Arbeit von Robinson [24] 1978:

Ist G eine nilpotente, nicht-abelsche Gruppe, die eine endliche Zentralreihe besitzt, deren Faktoren alle freie Module über ein und demselben Unterring der rationalen Zahlen sind, dann gibt es in $\text{Aut } G$ eine zu $\text{Inn } G$ - der Gruppe der inneren Automorphismen - fremde Untergruppe, die isomorph dem Zentrum von G ist.

Insbesondere schließt dieser Satz alle endlich erzeugten, torsionsfreien nilpotenten Gruppen ein.

Im Allgemeinen ist die Existenz äußerer Automorphismen von endlich erzeugten nilpotenten (diskreten) Gruppen immer noch ein ungelöstes Problem. Für einige Spezialfälle konnte Stonehewer äußere Automorphismen nachweisen.

Über die Frage nach der Existenz äußerer Automorphismen hinaus interessiert uns die "Größe" und die Struktur von $\text{Aut } G$: Ist $\text{Aut } G$ "größer" als G ? oder: Ist der größte nilpotente Normalteiler - die Fittinguntergruppe - "größer" als G ? Als Maß für die Größe einer Gruppe werden wir einen Begriff von Dimension bzw. Rang entwickeln.

Diese Fragen sollen hier für verschiedene Klassen lokalkompakter Gruppen untersucht werden, wobei es wesentlich ist, zusammenhängende und totalunzusammenhängende Gruppen zu unterscheiden; eine Unterteilung, die der in torsionsfreie und periodische Gruppen im diskreten Fall entspricht. Die Antwort auf obige Fragen fällt positiv aus, wobei wir allerdings außer den abelschen Gruppen noch einen Gruppentyp ausschließen müssen, nämlich extraspezielle Gruppen. So werden hier nilpotente Gruppen der Klasse zwei genannt, deren Zentren eindimensional sind (bzw. den Rang eins haben), eine Definition, die etwas von der Heineken's [9] abweicht. Extraspezielle Gruppen der betrachteten Gruppenklassen besitzen zwar äußere Automorphismen, die sogar explizit berechnet werden, aber die Fittinguntergruppe enthält nur innere Automorphismen.

Die in allen Fällen angewandte Technik verdanke ich einer Anregung von Robinson: Wir suchen eine abelsche charakteristische Untergruppe A von G und zeigen für den Stabilisator der Reihe $1 \trianglelefteq A \trianglelefteq C_G(A) \trianglelefteq G$ in $\text{Aut } G$, daß er genügend äußere Automorphismen enthält. Mit derselben Methode lassen sich auch für Liealgebren äußere Derivationen konstruieren. Die technischen Lemmata, die sowohl für Liealgebren, zusammenhängende und totalunzusammenhängende Gruppen anwendbar sind, werden im ersten Kapitel bereitgestellt.

Das zweite Kapitel befaßt sich mit reellen, endlich-dimensionalen Liealgebren. Obwohl die bloße Existenz äußerer Derivationen auch einfacher gezeigt werden könnte, wenden wir unser allgemeines Verfahren an. Damit erhält man ein nilpotentes Ideal in der Derivationalgebra von einer Dimension größer oder gleich der der Liealgebra selbst.

Im zweiten Paragraphen betrachten wir die Liealgebra der strikt oberen $n \times n$ - Dreiecksmatrizen über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ - kurz $N(n, \mathbb{R})$ genannt - und konstruieren äußere Derivationen mit der oben kurz beschriebenen Technik. Dieses Beispiel ist insofern typisch, da sich jede endlichdimensionale nilpotente Liealgebra in eine Algebra der Form $N(n, \mathbb{R})$ einbetten läßt. Es stellt sich heraus, daß die Derivationalgebra von $N(n, \mathbb{R})$ auflösbar ist, falls n größer als 3 ist. Die Liealgebra $N(3, \mathbb{R})$ - die sog. Heisenbergalgebra - ist eine extraspezielle Liealgebra, d.h. hat Nilpotenzklasse zwei und eindimensionales Zentrum. Die Derivationalgebra von extraspeziellen Liealgebren wird im letzten Paragraphen dieses Kapitels berechnet.

Kapitel II erhebt keinen Anspruch auf größte Allgemeinheit; z.B. spielt die Wahl von $\mathbb{R}$ als Grundkörper und die Beschränkung auf endliche Dimension keine entscheidende Rolle. Dieser Abschnitt versteht sich hauptsächlich als Demonstration unserer Technik anhand eines einfachen Beispiels.

Im dritten Kapitel werden nilpotente, zusammenhängende, lokalkompakte Gruppen untersucht. Nachdem die Struktur dieser Gruppen beschrieben ist, werden die stetigen Homomorphismen in abelsche Vertreter dieser Klasse berechnet. Enthält die Kommutatorgruppe einer zusammenhängenden lokalkompakten Gruppe G alle kompakten Normalteiler, und ist A eine abelsche, lokalkompakte Gruppe,

dann bilden die stetigen Homomorphismen von G nach A eine Gruppe, die topologisch isomorph ist zu einem direkten Produkt von Kopien von $\mathbb{R}$ - der additiven Gruppe der reellen Zahlen. Mit diesem Ergebnis läßt sich dann auch beweisen, daß Zentralisatoren in zusammenhängenden nilpotenten Gruppen selbst zusammenhängend sind.

In § 3 wird zunächst gezeigt, daß für eine nilpotente, zusammenhängende, lokalkompakte Gruppe G , für die $\text{Inn } G$ in einer lokalkompakten Untergruppe von $\text{Aut } G$ liegt, bereits $\text{Inn } G$ selbst abgeschlossen in $\text{Aut } G$ und deshalb eine nilpotente, einfach zusammenhängende Liegruppe ist. Insbesondere gilt dies, wenn G eine Liegruppe ist. Am Beispiel einer auflösbaren, einfach zusammenhängenden Liegruppe wird gezeigt, daß die Nilpotenz eine notwendige Voraussetzung ist.

Der Hauptsatz dieses Kapitels besagt, daß in $\text{Aut } G$ ein nilpotenter Normalteiler existiert mit einer zu $\text{Inn } G$ fremden Untergruppe, die isomorph dem direkten Produkt von $\dim Z(G)$ Kopien von $\mathbb{R}$ ist. Ausgeschlossen sind dabei abelsche und extraspezielle Gruppen. Letztere Klasse wird - nachdem in § 4 an einem Beispiel die Konstruktion äußerer Automorphismen demonstriert wurde - in § 5 ausführlich diskutiert. Es zeigt sich, daß die Automorphismengruppe einer extraspeziellen Gruppe das semidirekte Produkt von $\text{Inn } G$ mit einer symplektischen Gruppe und $\text{Aut } Z(G)$ ist. Außerdem werden die Fittinguntergruppe, der größte auflösbare Normalteiler von $\text{Aut } G$ und das Zentrum von $\text{Aut } G$ angegeben.

Zum Schluß von Kapitel III werden im 6. Paragraphen einige Folgerungen zusammengestellt und gezeigt, wann man von der Struktur der Automorphismengruppe auf die der Gruppe schließen kann.

Das letzte Kapitel befaßt sich mit totalunzusammenhängenden kompakten Gruppen. In dieser Gruppenklasse spielen die pro-p-Gruppen die gleiche Rolle wie die p-Gruppen bei endlichen Gruppen. Deshalb genügt es, pro-p-Gruppen für eine Primzahl p zu betrachten. Wir definieren für diese Gruppen einen Rang und prüfen ihn auf seine Nützlichkeit für unsere Zwecke.

Das wichtigste Ergebnis von § 2 ist die algebraische und topologische Charakterisierung der Homomorphismengruppe zweier abelscher, torsionsfreier, kompakter pro-p-Gruppen. In § 3 werden wieder die eingangs gestellten Fragen für nilpotente, torsionsfreie, kompakte pro-p-Gruppen beantwortet und die Existenz einer zum Zentrum von G isomorphen Untergruppe von $\text{Aut } G$ bewiesen, die mit $\text{Inn } G$ trivialen Schnitt hat und in einem nilpotenten Normalteiler von $\text{Aut } G$ liegt. Die Ausnahme, nämlich die Klasse der extraspeziellen Gruppen, wird in § 4 diskutiert, in dem wir auch die Fittinguntergruppe von $\text{Aut } G$ und von $\text{Aut } G/\text{Inn } G$ bestimmen, sowie die Trivialität des Zentrums von $\text{Aut } G$ zeigen. Dabei verwenden wir eine Variation der Technik, mit der R. Baer bereits 1938 [1] Automorphismen diskreter nilpotenter Gruppen der Klasse zwei konstruierte.

Der Leser wird bemerken, daß in dieser Arbeit implizit Methoden der Kohomologietheorie verwendet wurden. Obwohl eine solche Theorie in verschiedenen Varianten auch für topologische Gruppen existiert - die allgemeinste von C.C. Moore [20] und [21] - verzichten wir darauf, die Ergebnisse einer Kohomologietheorie zu verwenden. Dies geschieht einerseits wegen der größeren Anschaulichkeit von expliziten Berechnungen und andererseits, um nicht unnötigerweise tiefliegende und der Gruppentheorie fremde Sätze zu benutzen, wie dies z.B. in der von C.C. Moore entwickelten Theorie geschieht.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Dr. Stonehewer danken, der mich zur Untersuchung der Automorphismengruppe von nilpotenten Gruppen anregte und besonders Herrn Professor Robinson, der mich in Gesprächen und Briefen mit der wesentlichen Technik vertraut machte, die ich hier auf topologische Gruppen anwenden konnte.

Ganz herzlich danke ich Herrn Professor Plaumann für die Anregung zu dieser Arbeit, der Betreuung und der hilfreichen Unterstützung während meines Studiums.

Kapitel I

Notationen, Grundbegriffe und technische Lemmata

Seien G und H lokalkompakte Gruppen oder Liealgebren.

g und x Elemente von G und $h \in H$. Dann bezeichne

$Z(G)$	= Zentrum von G
$Z_n(G)$	= n -te Term der aufsteigenden Zentralreihe von G (siehe Seite 11)
$[g, x]$	= $g^{-1}x^{-1}gx$ für Gruppen und das Lieprodukt für Liealgebren
$[N, H]$	= von $\{[n, h] n \in N, h \in H\}$ erzeugte Gruppe (bzw. Algebra), wobei $N \leq G, H \leq G$.
G'	= $\overline{[G, G]}$, die topologisch abgeschlossene Kommutatorgruppe (siehe Seite 11)
$C_G(A)$	= Zentralisator von A in G
$N_G(A)$	= Normalisator (bzw. Idealisator) von A in G
$\text{Fit}(G)$	= Größter(s) nilpotenter(s) Normalteiler (Ideal) in G
$\text{Aut}G$	= Gruppe der topologischen Automorphismen von G (siehe Seite 5)
c_g	= $(x \rightarrow g^{-1} x g = x^g)$ Konjugation mit $g \in G$, falls G Gruppe ist
$\text{Inn}G$	= $\{c_g g \in G\}$ Gruppe der inneren Automorphismen von G
$\text{Hom}(G, H)$	= Menge aller stetigen Homomorphismen von G in H (siehe Seite 3)
$\text{Im } \alpha, \text{Ker } \alpha$	= Bild von α , Kern von α , wenn $\alpha \in \text{Hom}(G, H)$
$\text{Der } G, \text{Ider } G$	= Derivationen, innere Derivationen der Liealgebra G (siehe Seite 5)
$\text{Der}(G, A), \text{Ider}(G, A)$	= Derivationen, innere Derivationen von G in den G -Modul A (siehe Seite 5)
$H^1(G, A)$	= $\text{Der}(G, A) / \text{Ider}(G, A)$

- $\text{Stab}(N \trianglelefteq G)$ = Stabilisator der Reihe $1 \trianglelefteq N \trianglelefteq G$, also $\{ \alpha \in \text{Aut} G \mid \alpha(n) = n \text{ für alle } n \in N, g^{-1} \alpha(g) \in N \text{ für alle } g \in G \}$. Wir schreiben $\text{Stab } N$, falls Mißverständnisse ausgeschlossen sind.
- $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \text{GL}(V)$ = lineare Gruppe, Automorphismengruppe des n -dimensionalen reellen Vektorraumes V
- $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ = symplektische Gruppe
- $\text{UT}(n, \mathbb{R})$ = Gruppe der unitriangulären Matrizen, d.h. obere Dreiecksmatrizen mit 1 auf der Diagonalen
- Δ_p, J_p = Ring, additive Gruppe der ganzen p -adischen Zahlen
- $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ = additive Gruppe der reellen, rationalen, bzw. ganzen Zahlen
- T = $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, eindimensionaler Torus
- $\prod_{i \in I} A_i$ = direktes (kartesisches) Produkt mit Produkttopologie. Sind alle A_i isomorph A , schreiben wir auch $\prod_I A$ oder $\prod_{\mathcal{M}} A$, wenn $\mathcal{M}$ die Mächtigkeit der Indexmenge I ist.
- $\bigoplus_{i \in I} A_i$ = direkte Summe (beschränktes Produkt) = $\{ a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \mid a_i = 1 \text{ für fast alle } i \in I \}$
- $G = Q[N]$ = semidirektes Produkt von $Q \leq G$ mit $N \trianglelefteq G$ (siehe Seite 14 und Seite 30)
- $\alpha \cong \beta$ = isomorph, topologisch isomorph, homöomorph
- $\mathbb{Z}_n$ = zyklische Gruppe der Ordnung n
- $\mathbb{Z}_F^\infty$ = Prüfergruppe oder quasizyklische Gruppe

§ 1 Abbildungsgruppen und ihre Topologie

Seien G und H lokalkompakte Gruppen oder Liealgebren. Für eine Abbildung α von G nach H verwenden wir verschiedene Schreibweisen mit der Konvention: $\alpha = (g \rightarrow h)$, dann ist $h = \alpha(g) = g^\alpha$. Einen stetigen Homomorphismus α , der eine offene Abbildung auf $\text{Im } \alpha$ darstellt, nennen wir einen topologischen Homomorphismus. Man beachte, daß stetige Homomorphismen von Vektorräumen automatisch **linear und deshalb auch topologische Homomorphismen sind**. Für zwei Abbildungen α, β von G nach H sei

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(g) &= \alpha(g) \cdot \beta(g) \quad (\text{bzw. } \alpha(g) + \beta(g) \text{ bei Liealgebren}) \\ 0(g) &= e \quad (e \text{ neutrales Element von } H) \end{aligned}$$

Ist $G = H$, so schreiben wir

$$\begin{aligned} (\alpha \beta)(g) &= \alpha(\beta(g)) \\ 1(g) &= g \end{aligned}$$

Sei $\mathcal{C}(G, H)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $G \rightarrow H$,
 $C \subset G$, $U \subset H$ und

$$W(C, U) := \{ \alpha \in \mathcal{C}(G, H) \mid \alpha(C) \subset U \}$$

Falls $G = H$, definiere man

$$\begin{aligned} V_1(C, U) &:= (1 + W(C, U)) \cap \text{Aut } G \\ V(C, U) &:= V_1(C, U) \cap V_1(C, U)^{-1} \end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen läßt sich nun auf $\text{Aut } G$, $\text{Der}(G, A)$ (wenn A ein G -Modul ist) und $\text{Hom}(G, A)$ (Wenn A abelsche Gruppe oder Liealgebra ist) eine Topologie einführen, die diese Gruppen zu topologischen Gruppen macht:

Lemma (1.1): Seien G und H lokalkompakte Gruppen, $\mathcal{X}$ eine Familie kompakter Mengen in G , so daß für alle $x \in G$ ein $C \in \mathcal{X}$ existiert mit $x \in C$ und sei $\mathcal{U}$ ein fundamentales Umgebunssystem des neutralen Elementes e in H .

i) (Hewitt-Ross [10; 23.34 a,b])

Ist H abelsche Gruppe, dann ist $\mathcal{C}(G,H)$ bzgl.

'+' eine abelsche topologische Gruppe mit einer

Umgebungsbasis der 0:

$$\mathcal{W} := \{ W(C,U) \mid C \in \mathcal{L}, U \in \mathcal{U} \}$$

ii) (Hewitt-Ross [10; 26.5])

Ist $G = H$, dann ist $\text{Aut}G$ bzgl. '.' eine topo-

logische Gruppe mit einer Umgebungsbasis der 1:

$$\mathcal{W} := \{ V(C,U) \mid C \in \mathcal{L}, U \in \mathcal{U} \}$$

Bemerkungen:

- 1) Sind G und H Liealgebren, also insbesondere Vektorräume, so sind $\text{Der } G$, $\text{Hom}(G,H)$ und $\text{Der}(G,H)$ (falls H G -Modul ist) Untergruppen von $\mathcal{C}(G,G)$ bzw. $\mathcal{C}(G,H)$ und tragen die entsprechende Relativtopologie. Diese ist allerdings äquivalent zu der üblichen Topologie auf linearen Gruppen, die durch Einbettung in einen $(\dim G) \cdot (\dim H)$ - dimensionalen Vektorraum erhalten wird.
- 2) Für zusammenhängende Liegruppen ist $\text{Aut}G$ ebenfalls Liegruppe, da $\text{Aut}G$ isomorph einer abgeschlossenen Untergruppe einer linearen Gruppe ist. Die dadurch erhaltene Topologie stimmt mit der oben definierten überein (vergl. [12; S. 98, Th. 1.2]).
- 3) $\text{Hom}(G,H)$ und $\text{Der}(G,H)$ seien mit der Relativtopologie von $\mathcal{C}(G,H)$ versehen. Wir kürzen ab: $W(C,U)$ statt $W(C,U) \cap \text{Hom}(G,H)$ usw.
- 4) Für alle in dieser Arbeit auftretenden Automorphismengruppen stimmt die Topologie von (1.1 ii)) mit der kompakt-offenen überein, welche statt mit $V(C,U)$ nur mit $V_1(C,U)$ definiert wird. Diese und andere Ergebnisse finden sich bei Grosser-Loos-Moskowitz [8], Wang [25] und anderen Autoren. Wir verzichten

auf die Anwendung dieser Resultate, da sie keine wesentliche Vereinfachung bringen.

- 5) Der Homomorphismus $G \rightarrow \text{Inn}G$, $g \mapsto c_g$ ist in obiger Topologie stetig (Hewitt-Ross [10; 26.7]), aber i.A. kein topologischer Homomorphismus (siehe Beispiel in III § 3).

§ 2 Derivationen und Modulen

In den folgenden Definitionen sei jeweils G eine lokalkompakte Gruppe oder Liealgebra, g, h und x Elemente von G .

- a) Eine abelsche lokalkompakte Gruppe (Liealgebra) A heiße ein G -Modul, wenn ein stetiger Homomorphismus (Liehomomorphismus) φ von G in $\text{Aut } A$ ($\text{GL}(A)$) existiert und

$$\begin{aligned} G \times A &\rightarrow A \\ (g, a) &\rightarrow a^{\varphi(g)} =: a^g \end{aligned}$$

stetig ist.

- b) Unter einer Derivation d von G in A versteht man eine stetige (lineare) Abbildung $d : G \rightarrow A$ mit

$$d(g \cdot h) = d(g)^h + d(h) \quad (\text{bzw. } d([g, h]) = d(g)^h - d(h)^g) \quad (1)$$

Diese Derivationen bilden bzgl. "+" in der oben definierten Topologie eine abelsche topologische Gruppe (bzw. einen Vektorraum), die mit $\text{Der}(G, A)$ bezeichnet wird. Beachte, daß aus (1) folgt, daß das neutrale Element von G auf die Null von A abgebildet wird.

Für $a \in A$ und $x \in G$ läßt sich der Kommutator definieren und zwar $[a, x] = -a + a^x$ (bzw. a^x bei Liealgebren). Die Menge

$$\text{Ider}(G, A) := \{ d \mid d(x) = -[a, x] \text{ für ein } a \in A \} \quad (2)$$

ist eine Untergruppe (Unteralgebra) von $\text{Der}(G, A)$, denn

$$(-a^g + a)^h + (-a^h + a) = -a^{gh} + a \quad \text{bei Gruppen}$$

bzw.

$$(-a^g)^h - (-a^h)^g = -a^{[g,h]} \quad \text{bei Liealgebren}$$

Wir nennen $d \in \text{Ider}(G, A)$ eine innere Derivation.

Es erweist sich gelegentlich als praktischer auszunützen, daß mit d auch $-d$ in $\text{Ider}(G, A)$ liegt und das negative Vorzeichen in (2) wegzulassen, also $d \in \text{Ider}(G, A)$ genau dann, wenn ein $a \in A$ existiert mit $d(g) = a^{-1} + g$ (bzw. a^g).

Die Faktorgruppe $\text{Der}(G, A) / \text{Ider}(G, A)$ wird mit $H^1(G, A)$ abgekürzt, in Anlehnung an die erste Kohomologiegruppe.

- c) Wenn $A \trianglelefteq G$ und A abelsch, so ist A durch die Konjugation in G (bzw. die rechtsadjungierte Darstellung) ein G -Modul. Dies rechtfertigt insbesondere die Kommutatorschreibweise in (2). Ist $M \leq C_G(A)$ und $M \trianglelefteq G$, so kann man A auch als $\frac{G}{M}$ -Modul betrachten. Wir schreiben a^g statt a^{gM} für $a \in A$ und $g \in G$.

Wir wollen in dieser Situation die hier definierten Derivationen in Relation zu der bekannten Liealgebra von Derivationen einer Liealgebra G , hier $\text{Der } G$ genannt, bringen.

$\text{Der } G = \{ d \in \text{Hom}(G, G) \mid d[g, h] = [d(g), h] + [g, d(h)] \}$ und
 $\text{Ider } G = \{ d \in \text{Der } G \mid d(g) = [g, h] \text{ für ein } h \in G \}$ sei das Ideal der inneren Derivationen - in der Literatur oft mit $\text{ad } G$ bezeichnet. Die oben definierten Vektorräume $\text{Der}(\frac{G}{M}, A)$ und $\text{Ider}(\frac{G}{M}, A)$ sind in kanonischer Weise als abelsche Unteralegebren von $\text{Der } G$ zu betrachten, d.h. wir identifizieren

$$\text{Der}(\frac{G}{M}, A) = \{ d \in \text{Der } G \mid d(M) = 0 \text{ und } d(G) \subset A \} \leq \text{Der } G$$

$$\text{Ider}(\frac{G}{M}, A) = \{ d \in \text{Der } G \mid d(x) = [x, a] \text{ für ein } a \in A \} \leq \text{Ider } G$$

- d) Wenn A ein trivialer G -Modul ist, dann impliziert (1)

$$\text{Der}(G, A) = \text{Hom}(G, A)$$

§ 3 Einige technische Lemmata

Das folgende Lemma wird das entscheidende Hilfsmittel zur Konstruktion äußerer Automorphismen sein.

Lemma (1.2): Sei G eine lokalkompakte Gruppe (bzw. Liealgebra), A und M abgeschlossene Normalteiler (Ideale) in G mit $A \leq Z(M)$ und sei $d \in \text{Der}(\frac{G}{M}, A)$, p die kanonische Projektion $p : G \rightarrow \frac{G}{M}$. Dann gilt:

$$\text{i)} \quad \alpha_d := 1 + dp \in \text{Aut } G$$

$$\text{ii)} \quad \text{Der}(\frac{G}{M}, A) \rightarrow \text{Aut } G \text{ ist ein topologischer Monomorphismus}$$

$$\varepsilon : d \longrightarrow \alpha_d$$

$$\text{und } \varepsilon(\text{Der}(\frac{G}{M}, A)) = \text{Stab } A \cap \text{Stab } M$$

Falls weiterhin $M = C_G(A)$ und $A = Z(M)$ ist, dann gilt

$$\text{iii)} \quad \varepsilon(\text{Ider}(\frac{G}{M}, A)) = \text{Stab } A \cap \text{Stab } M \cap \text{Inn } G$$

(bzw. bei Liealgebren:

$$\text{Ider}(\frac{G}{M}, A) = \text{Der}(\frac{G}{M}, A) \cap \text{Ider } G)$$

$$\text{iv)} \quad \text{Ist } D \text{ eine abgeschlossene Untergruppe von } \text{Der}(\frac{G}{M}, A) \text{ mit } D \cap \text{Ider}(\frac{G}{M}, A) = 0, \text{ so ist für } Y = \varepsilon(D) :$$

$$Y \cap \text{Inn } G = 1 \text{ (bzw. für Liealgebren } D \cap \text{Ider } G = 0)$$

$$\text{v)} \quad \text{Falls } A \text{ charakteristisch in } G \text{ ist, dann ist } \text{Stab } A \text{ normal in } \text{Aut } G \text{ (bzw. } \text{Der}(\frac{G}{A}, A) \text{ ist ein Ideal in } \text{Der } G).$$

Bemerkung:

Sei G eine Liealgebra, dann ist $\text{Der } G$ die Liealgebra von $\text{Aut } G$ (vergl. [13 ; 9.8]), wobei die Einschränkung der Exponentialabbildung von $\text{Der } G$ nach $\text{Aut } G$ auf $\text{Der}(\frac{G}{M}, A)$ gerade die Abbildung ε aus ii) ist. Lemma (1.2) besagt also insbesondere, daß

$\exp|_{\text{Der}(G/M, A)}$ injektiv und homomorph ist.

Beweis:

Seien jeweils g, h Elemente von G , $d \in \text{Der}(\frac{G}{M}, A)$ und $\alpha \in \text{Aut } G$.

Bei Liealgebren betrachten wir $\text{Der}(\frac{G}{M}, A)$ als Unteralgebra von $\text{Der } G$ und schreiben gelegentlich d statt d_p . Für $p(g)$ schreiben wir auch $\overline{g}$.

i) Da $pdp(G) \subset p(A) = 0$, ist für $d_1, d_2 \in \text{Der}(\frac{G}{M}, A)$

$$(d_1 p)(d_2 p) = 0 \quad (1)$$

Deshalb ist $(1+dp)(1-dp) = (1-dp)(1+dp) = 1$ und $\alpha_d = 1+dp$ ist bijektiv. Insbesondere ist $\alpha_d^{-1} = \alpha_{-d}$.

Die Homomorphie von α folgt für Liealgebren aus

$$\begin{aligned} (1+d)[g, h] &= [g, h] + [d(g), h] + [g, d(h)] + 0 = \\ &= [g, h] + [d(g), h] + [g, d(h)] + [d(g), d(h)] = \\ &= [(1+d)g, (1+d)h] \end{aligned}$$

und für Gruppen aus

$$\begin{aligned} (1+dp)(g \cdot h) &= g \cdot h \cdot d(g)^h \cdot d(h) = g \cdot h \cdot h^{-1} \cdot d(g) \cdot h \cdot d(h) = \\ &= (1+dp)(g) \cdot (1+dp)(h). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von α_d folgt aus der Definition.

ii) Seien $d_1, d_2 \in \text{Der}(\frac{G}{M}, A)$, dann folgt aus (1)

$$(1+d_1 p)(1+d_2 p) = 1 + (d_1 + d_2)p$$

d.h. ε ist homomorph und offensichtlich auch injektiv.

$1 + dp$ zentralisiert M , somit auch A und induziert auf $\frac{G}{A}$ die Identität, also auch auf $\frac{G}{M}$. Deshalb ist $\varepsilon(\text{Der}(\frac{G}{M}, A)) \leq \text{Stab } A \cap \text{Stab } M$.

• Sei $\alpha \in \text{Stab } A \cap \text{Stab } M$ gegeben, dann gilt für Liealgebren:

$$\begin{aligned} 0 &= [-g + \alpha(g), -h + \alpha(h)] = [g, h] - [g, \alpha(h)] - [\alpha(g), h] + \\ &+ [\alpha(g), \alpha(h)] \quad \text{und deshalb} \end{aligned}$$

$$(-1 + \alpha)[g, h] = -[g, h] + [\alpha(g), \alpha(h)] = -2[g, h] + [g, \alpha(h)] + [\alpha(g), h] = [(-1 + \alpha)(g), h] + [g, (-1 + \alpha)(h)]$$

Weiterhin ist

$$(-1 + \alpha)(M) = 0$$

$$(-1 + \alpha)(G) \subset A$$

Damit ist $(-1 + \alpha) \in \text{Der}(\frac{G}{M}, A)$; ε ist surjektiv und als lineare Abbildung ein topologischer Homomorphismus.

Für Gruppen gilt die Gleichung :

$$(-1 + \alpha)(gh) = h^{-1}g^{-1}\alpha(g)\alpha(h) = ((-1 + \alpha)(g))^h(-1 + \alpha)(h) \quad (2)$$

Wir definieren $d(\bar{g}) := (-1 + \alpha)(g)$, dann ist d wohldefiniert, da $(-1 + \alpha)(M) = 1$ und da $d(\frac{G}{M}) \subset A$ folgt mit (2), daß $d \in \text{Der}(\frac{G}{M}, A)$ und ε surjektiv ist.

Wir zeigen schließlich, daß ε auch für Gruppen ein topologischer Homomorphismus ist. Dazu wähle man o.E. eine Umgebungsbasis $\mathcal{U}$ der 1 in G bestehend aus symmetrischen Umgebungen.

Dann ist $\mathcal{U}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{U}\}$ ein fundamentales Umgebungssystem der 1 in A . Ebenso ist für eine Familie $\mathcal{X}$ kompakter Mengen in G auch $p\mathcal{X} = \{pC \mid C \in \mathcal{X}\}$ eine solche Familie in

$\frac{G}{M}$ und wenn $\mathcal{X}$ G überdeckt, so auch $p\mathcal{X}$ $\frac{G}{M}$. Es gilt für

$C \in \mathcal{X}$, $U \in \mathcal{U}$ und $X := \text{Stab } A \cap \text{Stab } M$:

$$\begin{aligned} ((1+W(C, U)) \cap X)^{-1} &= (1-W(C, U)) \cap X = (1+W(C, U^{-1})) \cap X = \\ &= (1+W(C, U)) \cap X \end{aligned}$$

also

$$V(C, U) \cap X = (1+W(C, U)) \cap X$$

deshalb

$$\varepsilon(W(pC, U \cap A)) = (1+W(C, U)) \cap X = V(C, U) \cap X$$

d.h. ε bildet eine Umgebungsbasis der 0 in $\text{Der}(\frac{G}{M}, A)$ auf eine der 1 in X ab und ist ein topologischer Homomorphismus.

- iii) Sei G zunächst eine Gruppe und $d \in \text{Der}(\frac{G}{M}, A)$. Es gilt:
 $\varepsilon(d) \in \text{Inn } G$ genau dann, wenn $1 + dp = c_g$ für ein $g \in G$, also
 $dp(x) = x^{-1} x^g = [x, g]$. Damit ist gezeigt, daß
 $\varepsilon(\text{Ider}(\frac{G}{M}, A)) \subset \text{Inn } G \cap \text{Stab } A \cap \text{Stab } M$ und um Gleichheit
zu zeigen, genügt es zu beweisen, daß $g \in A$ ist sobald
 $c_g \in \text{Stab } A \cap \text{Stab } M$.

Auch für Liealgebren reduziert sich die Behauptung auf das analoge Problem, denn $\text{Ider}(\frac{G}{M}, A) \leq \text{Der}(\frac{G}{M}, A) \cap \text{Ider } G$.

Sei e das neutrale Element von G und $d \in \text{Der}(\frac{G}{M}, A)$ so daß
 $dp(x) = [x, g]$.

$$1) dp(A) = e, \text{ also } [A, g] = e \text{ und } g \in C_G(A) = M$$

$$2) dp(M) = e, \text{ also } g \in C_G(M) \cap M = Z(M) = A.$$

iv) folgt direkt aus iii).

- v) Die definierenden Relationen für $\alpha \in \text{Stab } A$, nämlich für $x \in G$:
 $x^{-1} \alpha(x) \in A$ (bzw. $-x + \alpha(x) \in A$) und $\alpha(a) = a$ für alle
 $a \in A$ bleiben erhalten, wenn man α durch $\beta^{-1} \alpha \beta$ ersetzt,
denn $\beta(A) \leq A$. Analog für die Derivationen der Liealgebra $G \square$

Für Liealgebren kann man, ähnlich wie im Teil iii) des obigen Beweises, zeigen, daß unter den Voraussetzungen $A \leq B \leq M \leq N \leq G$,
 $A = C_B(N)$, $B \leq Z(M)$ und $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$ auch gilt

$$\text{Ider}(\frac{G}{M}, B) \cap \text{Der}(\frac{G}{N}, A) = \text{Ider}(\frac{G}{N}, A) \quad (1)$$

denn $d(x) = [x, b]$ für $x \in G$ und ein $b \in B$, $d \in \text{Der}(\frac{G}{N}, A)$ heißt
 $[N, b] = 0$, also $b \in C_G(N) \cap B = C_B(N) = A$, somit $d \in \text{Ider}(\frac{G}{N}, A)$.

Identifizieren wir alle diese Derivationengruppen mit (abelschen) Unterhalbgruppen von $\text{Der } G$, so ist $\text{Der}(\frac{G}{N}, A) \leq \text{Der}(\frac{G}{M}, B)$ und

$\text{Ider}(\frac{G}{N}, A) \leq \text{Ider}(\frac{G}{M}, B)$. Diese Einbettung induziert eine lineare Abbildung $\varphi : \text{Der}(\frac{G}{N}, A) \rightarrow \text{Der}(\frac{G}{M}, B) / \text{Ider}(\frac{G}{M}, B) = H^1(\frac{G}{M}, B)$ mit $\text{Ker } \varphi = \text{Der}(\frac{G}{N}, A) \cap \text{Ider}(\frac{G}{M}, B) = \text{Ider}(\frac{G}{N}, A)$ nach (1). Man erhält also eine injektive lineare Abbildung $H^1(\frac{G}{N}, A) \rightarrow H^1(\frac{G}{M}, B)$. Halten wir fest:

Lemma (1.3): Sei G eine Liealgebra und $A \leq B \leq M \leq N$ Ideale in G mit $A = C_B(N)$ und $B \leq Z(M)$. Dann existiert eine injektive lineare Abbildung von $H^1(\frac{G}{N}, A)$ in $H^1(\frac{G}{M}, B)$.

Eine topologische Gruppe G heißt nilpotent der Klasse c , wenn $Z_c(G) = G$ und $Z_{c-1}(G) \neq G$, wobei $Z_n(G)$ wie bei diskreten Gruppen induktiv definiert ist: $Z_0(G) = Z(G)$, $\frac{Z_n(G)}{Z_{n-1}(G)} := Z(\frac{G}{Z_{n-1}(G)})$ für $n \geq 1$.

Die rein algebraisch definierte Reihe $\gamma_0(G) := G$, $\gamma_n(G) := [\gamma_{n-1}(G), G]$ endet bei nilpotenten Gruppen bekanntlich mit $\gamma_c(G) = 1$, besteht jedoch i.A. nicht aus abgeschlossenen Untergruppen. Wir definieren deshalb

$$G^{(0)} := G, \quad G^{(n)} := \overline{[G^{(n-1)}, G]}$$

Es stellt sich allerdings heraus, daß $G^{(n)} = \overline{\gamma_n(G)}$, da für $A \leq G$, $B \leq G$ stets gilt $\overline{[A, B]} = \overline{[A, B]}$ (vergl. [13; 11.2]). Insbesondere ist $G^{(c)} = 1$ wenn $\gamma_c(G) = 1$.

Wir bezeichnen die Nilpotenzklasse einer Gruppe oder Liealgebra mit cl(G).

Lemma (1.4): Sei G eine nilpotente Gruppe, A ein abelscher Normalteiler in G . Dann ist $X := \text{Stab } A \cdot \text{Inn } G$ eine nilpotente Untergruppe von $\text{Aut } G$ von der Nilpotenzklasse $c \leq \text{cl}(G)$.

Beweis:

Sei $c_g \in \text{Inn } G$ und $\alpha = 1 + d_p \in \text{Stab } A$ mit $d \in \text{Der}(G/A, A)$ (siehe 1.2), und $p: G \rightarrow G/A, g \mapsto gA = \bar{g}$. Dann gilt für $x \in G$:

$$[c_g, \alpha^{-1}](x) = c_{g^{-1}} \cdot \alpha \cdot c_g \cdot \alpha^{-1}(x) = x^{\alpha(g)} \bar{g}^{-1} = x^{d(\bar{g})} = c_{d(\bar{g})}(x)$$

Da $d(\bar{g}) \in A$, ist $-1 + c_{d(\bar{g})} \in \text{Ider}(G/A, A) \leq \text{Der}(G/A, A)$, also

$[c_g, \alpha^{-1}] \in \text{Stab } A$. In X ist also nicht nur $\text{Inn } G$, sondern auch $\text{Stab } A$ normal, womit die Behauptung nach einem Satz von Fitting (vergl. [16]) folgt, da $\text{cl}(\text{Stab } A) + \text{cl}(\text{Inn } G) = 1 + \text{cl}(G) - 1 = \text{cl}(G) \square$

Lemma (1.4)': Sei G eine nilpotente Liealgebra und A ein abelsches Ideal in G . Dann ist $X := \text{Der}(G/A, A) + \text{Ider } G$ nilpotent von der Klasse $c \leq \text{cl}(G)$.

Beweis:

Für $d \in \text{Der}(G/A, A)$, $d_g \in \text{Ider } G$ mit $d_g(x) = [x, g]$, $x \in G$ gilt $[d, d_g](x) = d d_g(x) - d_g d(x) = d([x, g]) - [d(x), g] = [x, d(g)]$. Nun bleibt die absteigende Zentralreihe $G^{(n)}$ ($n=0, \dots, \text{cl}(G)$) invariant unter Derivationen, so daß für $g \in G^{(n)}$ - und damit $d_g \in (\text{Ider } G)^{(n)} - [d, d_g] \in \text{Der}(G/A, A) \cap (\text{Ider } G)^{(n)}$ gilt. Man zeigt durch Induktion

$$X^{(n)} \leq (\text{Der}(G/A, A) \cap (\text{Ider } G)^{(n)}) + (\text{Ider } G)^{(n+1)}$$

und damit $X^{(\text{cl}(G))} = 0$. $\square$

Lemma (1.5): Sei G eine nilpotente Gruppe oder Liealgebra. Ist $Z(G') \leq Z(G)$, so ist $\text{cl}(G) \leq 2$, d.h. $G' \leq Z(G)$.

Beweis:

Sei $Z := Z(G)$ und $Z_2 := Z_2(G)$, e das neutrale Element von G .

Wegen $[Z_2, G] \leq Z$ ist auch $[[G, G], Z_2] = e$, was bei Liealgebren aus der Jacobi-Identität, bei Gruppen aus dem Dreiuntergruppenlemma folgt. Damit ist $[G', Z_2] = e$ (siehe Vorbemerkung) und

$$G' \cap Z_2 \leq Z(G') \leq Z$$

Die Bilder von G' und Z_2 in G/Z haben also trivialen Schnitt. Aber in einer nilpotenten Gruppe (Liealgebra) hat jeder(s) nichttriviale Normalteiler (Ideal) auch nichttrivialen Schnitt mit dem Zentrum und das Zentrum von G/Z ist Z_2/Z . Deshalb folgt $G' \leq Z$ und $\text{cl}(G) \leq 2$. $\square$

Kapitel II

Nilpotente Liealgebren

In diesem Kapitel sei G eine endlichdimensionale, reelle Liealgebra, $\dim G$ bezeichne die Dimension des Vektorraumes G und $\text{Hom}(G, H)$ sei der Vektorraum der linearen Abbildungen von G in den Vektorraum H . Der G und $\text{Ider } G$ sind Teilräume von $\text{Hom}(G, G)$, insbesondere ist auch $H^1(\frac{G}{M}, A)$ ein reeller Vektorraum, falls A und M Ideale in G sind und $M \leq C_G(A)$. Bekanntlich ist $\text{Der } G$ selbst eine Liealgebra und $\text{Ider } G$ ein Ideal. Die auf $H^1(\frac{G}{M}, A)$ induzierte Liestruktur ist trivial.

Eine Liealgebra heiße extraspeziell, wenn $G' = Z(G) \cong \mathbb{R}$ ist.

Falls Q und N Unterhalbgebren von G sind, N ein Ideal und der Vektorraum G die direkte Summe von Q und N - in Zeichen $G = Q \oplus N$ - dann heißt G das semidirekte Produkt der Liealgebren Q und N - in Zeichen $G = Q \ltimes [N]$. Wenn auch Q Ideal in G ist, nennt man G das direkte Produkt - in Zeichen $G = [Q] \oplus [N]$.

§ 1 Derivationen nilpotenter Liealgebren

Als einfachste Anwendung der in der Einleitung beschriebenen Technik beweisen wir:

Satz 1: Sei G eine endlichdimensionale, reelle und nilpotente Liealgebra, die weder abelsch noch extraspeziell ist, dann existiert ein die inneren Derivationen $\text{Ider } G$ enthaltendes nilpotentes Ideal X in $\text{Der } G$, welches über $\text{Ider } G$ als semidirektes Produkt zerfällt und eine Dimension größer oder gleich G hat. Also:

$$X = Y \oplus \text{Ider } G \quad \text{mit } \dim Y \geq \dim Z(G) \text{ und } Y \text{ abelsch.}$$

Beweis:

- a) Annahme: Jedes abelsche, charakteristische Ideal von G liege im Zentrum.

Mit (1.5) hat man $G' = [G, G] \leq Z(G) =: Z$ und deshalb

$$H^1(G/Z, Z) = \text{Der}(G/Z, Z) = \text{Hom}(G/Z, Z) =: X$$

wobei wir wieder X mit einem Teilraum von $\text{Der } G$ identifizieren.

X erfüllt bereits alle behaupteten Bedingungen:

- 1) Innere Derivationen bilden G in $[G, G] \leq Z$ ab und Z auf die Null, liegen also in X .
- 2) X ist abelsch, insbesondere also nilpotent und ein Ideal, da Z charakteristisch ist in G (vergl. Lemma (1.2)).
- 3) $\dim X = \dim G/Z \cdot \dim Z \geq \dim G/Z + \dim Z = \dim G$, denn das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist nur dann kleiner als die Summe, wenn einer der Faktoren gleich eins ist, aber: $\dim Z = 1$, heißt daß G extraspeziell ist und wenn $\dim G/Z = 1$, dann läßt sich jedes Element in G schreiben als $x + z$ mit $z \in Z$ und x aus einem eindimensionalen Komplement zu Z . Damit aber ist das Lieprodukt zweier Elemente $x + z$ und $x' + z'$ von G

$$[x + z, x' + z'] = [x, x'] = 0$$
also ist G abelsch. Beide Fälle sind ausgeschlossen.
- 4) Da X abelsch ist, bedeutet eine direkte Summe als Vektorraum auch ein direktes Produkt als Liealgebra und $X = [\text{Ider } G] \oplus [Y]$ mit einem (abelschem) Komplement Y zu $\text{Ider } G$, wobei

$$\dim Y = \dim X - \dim(\text{Ider } G) \geq \dim G - \dim G/Z = \dim Z$$

b) Wir können also annehmen, daß man charakteristische abelsche Ideale findet, die Z echt enthalten. Man wähle ein solches maximal, nenne es A und definiere $M := C_G(A)$. Dann gilt:

i) $M \neq G$, da $A > Z$

ii) M ist charakteristisch in G und somit auch $Z(M)$, denn für einen Lieautomorphismus α und $a \in A$, $m \in M$ ist auch $\alpha^{-1}(a) \in A$ und

$$[\alpha(m), a] = [m, \alpha^{-1}(a)] = \alpha(0) = 0$$

womit auch $\alpha(m) \in M$ ist.

iii) $Z(M) + A$ ist eine abelsche und charakteristische Unter-
algebra von G , liegt also wegen der Wahl von A in A . Da
aber auch $A \leq Z(M)$ ist gilt sogar $A = Z(M)$.

Definiert man $X := \text{Der}(\frac{G}{M}, A) + \text{Ider } G$, dann ist

1) X nilpotent nach Lemma (1.4)'.

2) Da A und M charakteristisch sind, ist X Ideal in $\text{Der } G$
(1.2 v).

3) X zerfällt über $\text{Ider } G$:

Man wähle ein Vektorraumkomplement Y zu $\text{Ider}(\frac{G}{M}, A)$ in
 $\text{Der}(\frac{G}{M}, A)$, welches - da $\text{Der}(\frac{G}{M}, A)$ abelsche Liealgebra ist -
sogar eine Unterlgebra bildet. Nach (1.2 iii) ist
 $Y \cap \text{Ider } G = 0$, also $X = Y \oplus [\text{Ider } G]$.

Man beachte, daß dies für Liealgebren der Nilpotenzklasse
größer 2 kein direktes Produkt ist, denn sonst wäre

$$[Y, X] = [Y, \text{Ider } G] \leq Y \cap \text{Ider } G = 0$$

aber wenn $d(x) = [x, g]$ für $x, g \in G$ und $\varphi \in Y$ ist, so gilt

$$[\varphi, d](x) = \varphi[x, g] - [\varphi(x), g] = [x, \varphi(g)]$$

und dies verschwindet nur dann für alle x , wenn $\varphi(g)$ aus
 Z ist. Es gibt aber für jedes $a \in A$ ein $g \in G$ und ein
 $\varphi \in Y$ mit $\varphi(g) = a$ (siehe weiter unten) und $Z < A$.

Nach Definition von Y ist $Y \cong \text{Der}(G/M, A) / \text{Ider}(G/M, A) = H^1(\frac{G}{M}, A)$ und es bleibt zu zeigen, daß $\dim H^1(\frac{G}{M}, A) \geq \dim Z$.

Da $\text{Ider } G \cong \frac{G}{Z}$ ist folgt dann auch

$$\dim X = \dim Y + \dim(\text{Ider } G) \geq \dim Z + (\dim G - \dim Z) = \dim G.$$

4) In nilpotenten Liealgebren existieren Ideale der Kodimension

1, also auch ein solches, sagen wir N , welches M enthält,

da $M \neq G$. Nach Lemma (1.3) ist dann

$\dim(H^1(\frac{G}{M}, A)) \geq \dim(H^1(\frac{G}{N}, C_A(N))) =: r$. Zu zeigen bleibt also noch $r \geq \dim Z$:

Wir schreiben den Vektorraum G als direkte Summe $N \oplus Q$

($Q \cong \mathbb{R}$) und $C := C_A(N)$. $\text{Hom}(Q, C)$ läßt sich genauso wie

$\text{Der}(Q, C)$ als Teilraum von $\text{Hom}(G, G)$ auffassen und zwar als

die Menge aller Endomorphismen, welche G in C abbilden und

N annullieren. Sei φ eine solche lineare Abbildung,

$q, q' \in Q$; $n, n' \in N$, dann gilt:

$$[\varphi(n+q), n'+q'] + [(n+q), \varphi(n'+q')] = [\varphi(q), q'] - [\varphi(q'), q]$$

Da q und q' linear abhängig sind ist dieser Ausdruck 0 und

somit gleich $\varphi[n+q, n'+q'] \in \varphi([G, G]) \subset \varphi(N) = 0$. Das be-

deutet nun daß φ eine Derivation ist und

$$\text{Der}(Q, C) = \text{Hom}(Q, C) \cong C$$

Unter diesem Isomorphismus, der jeder Derivation das Bild

eines festen Einheitsvektors aus Q zuordnet, ist

$$\text{Ider}(Q, C) \cong [G, C]$$

denn wählt man $q_0 \in Q$ fest, so ist $[q_0, C] = [Q, C] = [G, C]$

und wenn $x = \lambda q_0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), so definiert jedes Element

$$[q_0, c] = [\lambda q_0, \lambda^{-1} c] = [x, \lambda^{-1} c] \quad (c \in C) \text{ eine innere}$$

Derivation $d : Q \rightarrow C; x \rightarrow [x, \lambda^{-1}c]$.

Damit hat man $H^1(Q, C) \cong C/[G, C]$, also $r = \dim C - \dim [G, C]$.

Die lineare Abbildung $C \rightarrow C : c \rightarrow [g, c]$ ($g \in G$) hat den Kern $Z(G)$ und das Bild $[G, C]$, womit folgt:

$$\dim [G, C] = \dim \frac{C}{Z} = \dim C - \dim Z$$

Deshalb

$$r = \dim Z$$

was den Beweis von Satz 1 abschließt. $\square$

Bemerkung: Dieses Ergebnis läßt sich leicht auf zusammenhängende Liegruppen übertragen. Wir verzichten allerdings auf Einzelheiten, da dies ein Spezialfall von Satz 5 ist. Beweisskizze:

Man verwende (1,2) um einen Normalteiler X^* in der Gruppe der Lieautomorphismen der Liealgebra $\mathcal{L}(G)$ zu finden. Ist eine zusammenhängende nilpotente Liegruppe G gegeben, deren Liealgebra $\mathcal{L}(G)$ ist, so existiert auch eine einfach-zusammenhängende Überlagerungsgruppe $\tilde{G}$ und $\text{Aut } G \cong \text{Aut } \mathcal{L}(G)$ (vergl. [13 ; 9.4]). Es ist $\text{Aut } G$ jedoch eine abgeschlossene Untergruppe von $\text{Aut } G$, welche aus den Automorphismen besteht, die den Kern der Überlagerungsabbildung invariant lassen [13 ; 9.6]. Dieser Kern aber liegt im Zentrum und wird insbesondere auch durch den oben erwähnten nilpotenten Normalteiler X^* , bzw. dessen isomorphem Bild in $\text{Aut } \tilde{G}$, zentralisiert. Man kann also X^* isomorph auf einen abgeschlossenen Normalteiler in $\text{Aut } G$ abbilden und erhält die gewünschten Eigenschaften.

§ 2 Beispiele

Im Folgenden sollen die Derivationen der Liealgebra der strikt oberen Dreiecksmatrizen berechnet werden.

Definition: $E_{ij} := (x_{kl})_{k,l=1,\dots,n}; x_{kl} = \delta_{ik} \cdot \delta_{lj}; n \in \mathbb{N}$

$$G = G_n := \{ (x_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \mid x_{ij} = 0 \text{ für } i \geq j; x_{ij} \in \mathbb{R} \}$$

Die Einheitsmatrizen E_{ij} mit 1 in der i-ten Zeile und j-ten Spalte, Null sonst, bilden eine Basis des Matrizenrings $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und diejenigen mit $i < j$ eine für G_n . Wir schreiben lineare Abbildungen von G_n in sich - insbesondere also Derivationen - in dieser Basis:

$$d(E_{ij}) = \sum_{1 \leq k < l \leq n} d_{ij}^{kl} E_{kl} \quad ; (d_{ij}^{kl} \in \mathbb{R}, 1 \leq i < j \leq n) \quad (1)$$

Für das Lieprodukt gilt

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj} \quad (2)$$

Damit folgt, daß G tatsächlich eine Unterálgebra der vollen linearen Álgebra ist, denn $[G, G] \leq G$.

In G stimmt die aufsteigende Zentralreihe

$Z(G) \leq Z_2(G) \leq \dots Z_{n-1}(G) = G$ und die absteigende

$G \geq G' \geq G^{(2)} \dots G^{(n-1)} = 0$ überein und $G^{(n-k-1)} = Z_k(G)$ ist

(als Vektorraum) erzeugt von $\{E_{ij} \mid j-i \geq n-k\}$. Die Faktoren

$\frac{G^{(k-1)}}{G^{(k)}}$ werden von $\{E_{i,i+k} + G^{(k)} \mid i = 1, \dots, n-k\}$ aufgespannt.

Die Terme der Zentralreihe bleiben invariant unter den Derivationen, d.h. mit (1): $d_{ij}^{kl} = 0$ falls $l-k < j-i$.

Lemma (2.1): Falls $n \geq 4$, dann wirkt die von $d \in \text{Der } G_n$ auf $\frac{G}{G}$, induzierte lineare Abbildung diagonal:

$$d(E_{i,i+1}) = \lambda_i \cdot E_{i,i+1} + X ; (X \in G', \lambda_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, n-1)$$

Beweis:

Sei $|i-j| \geq 2$ und $1 \leq i, j \leq n-1$, dann folgt aus (2)

$$\begin{aligned} 0 &= [E_{i,i+1}, E_{j,j+1}] = d[E_{i,i+1}, E_{j,j+1}] = \\ &= \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} d_{i,i+1}^{kl} [E_{kl}, E_{j,j+1}] + \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} d_{j,j+1}^{kl} [E_{i,i+1}, E_{kl}] = \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} d_{i,i+1}^{kj} E_{k,j+1} - \sum_{l=j+2}^n d_{i,i+1}^{j+1,l} E_{j,l} + \sum_{l=i+2}^n d_{j,j+1}^{i+1,l} E_{i,l} - \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} d_{j,j+1}^{ki} E_{k,i+1} \end{aligned}$$

Es gibt nur zwei Möglichkeiten, daß Basisvektoren mehrmals auftreten in dieser Summe, nämlich:

1. Für $k = i$ in erster Summe und $l = j + 1$ in der dritten und $j > i$, dann ist $d_{i,i+1}^{i,j} = -d_{j,j+1}^{i+1,j+1}$
2. Für $l = i+1$ in der zweiten Summe und $k = j$ in der letzten und $j < i$, dann ist $d_{i,i+1}^{j+1,i+1} = -d_{j,j+1}^{ji}$

was also zu der selben Relation führt (vertausche i und j !).

Da alle anderen Basisvektoren nur einmal auftreten in der Summe, sind alle ihre Koeffizienten gleich Null:

$$\begin{aligned} d_{i,i+1}^{kj} &= 0 ; 1 \leq k \leq j-1, k \neq i, \\ d_{i,i+1}^{j+1,l} &= 0 ; j+2 \leq l \leq n, l \neq i+1 \end{aligned} \quad (3)$$

Dabei interessieren uns nur Koeffizienten $d_{i,j}^{kl}$ mit $l = k + 1$, also Derivationen, die auf $\frac{G}{G}$, nicht verschwinden.

Notation: $d_i^k := d_{i,i+1}^{k,k+1}$ und $d_i^k = 0$ wenn $k \leq 0$. Aus (3) folgt:

$$\left. \begin{aligned} 0 = d_i^1 = \dots d_i^{i-3}; \quad d_i^{i+1} = d_i^{i+2} = \dots = d_i^{n-2} = 0 \\ \text{und} \\ 0 = d_i^2 = \dots d_i^{i-1}; \quad d_i^{i+3} = \dots d_i^{n-1} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ für } i = 1, \dots, n-1$$

Womit $d_i^j = 0$ außer wenn $i = j$, $(j, i) = (1, 2)$ oder $(j, i) = (n-1, n-2)$.

Die letzten beiden Fälle schließt man wie folgt aus:

Sei $d(E_{2,3}) = d_2^2 \cdot E_{2,3} + d_2^1 \cdot E_{12} + X$ mit $X \in G_n^1$; $d_2^2, d_2^1 \in \mathbb{R}$, dann gilt durch wiederholte Anwendung von (2):

$$d_2^1 \cdot E_{1n} = d_2^1 \cdot [E_{1,2}, E_{2,n}] = [d(E_{2,3}) - d_2^2 \cdot E_{2,3} - X, E_{2,n}] =$$

$$[d(E_{2,3}), E_{2n}] = d([E_{2,3}, E_{2,n}]) - [E_{2,3}, d(E_{2n})] =$$

$$-[E_{2,3}, d(E_{2,n})] = 0$$

Dabei verwendeten wir die Invarianz von $Z_2(G)$ und $[G', Z_2(G)] = 0$,

$[E_{23}, Z_2(G)] = 0$ - was für $n \geq 4$ richtig ist.

Damit ist $d_2^1 = 0$ und ein analoges Argument zeigt $d_{n-2}^{n-1} = 0$,

womit das Lemma bewiesen ist. $\square$

Satz 2: Sei G_n die Liealgebra der strikt oberen $n \times n$ Dreiecksmatrizen und $n \geq 4$. Dann ist $\text{Der } G_n$ auflösbar.

Beweis:

a) Wir zeigen durch Induktion daß für $d \in \text{Der } G_n = \text{Der } G$

$$d(E_{ij}) = d_{ij} \cdot E_{ij} + X(i, j) \text{ mit } X(i, j) \in G^{(j-i)}, d_{ij} \in \mathbb{R}$$

Für $j - i = 1$ wurde dies im vorigen Lemma bewiesen.

Sei die Behauptung richtig für alle E_{ij} mit $j-i \leq k < n$ und betrachte $E_{i,i+k}$:

$$\begin{aligned} d(E_{i,i+k}) &= d([E_{i,i+1}, E_{i+1,i+k}]) = [d(E_{i,i+1}), E_{i+1,i+k}] + \\ &+ [E_{i,i+1}, d(E_{i+1,i+k})] \end{aligned}$$

Wie aus Lemma (2.1) folgt, sind die Unterräume N_i von G , die durch Weglassen eines Basisvektors $E_{i,i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$) entstehen, unter den Derivationen invariant falls $n \geq 4$ und ihr Zentrum ist gleich dem von G für $i \neq 1$ und $i \neq n-1$, während das Zentrum von N_1 (bzw. N_{n-1}) von $\{E_{1,n}, E_{2,n}\}$ (bzw. $\{E_{1,n}, E_{1,n-1}\}$) aufgespannt wird.

Zur Veranschaulichung:

$$N_i = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ & 0 & 0 & \cdots \\ & & & \ddots \\ & & & x_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{array} \right) \mid x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Z(N_i) = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & x_{1n} \\ & \ddots & x_{2n} \\ & & 0 \end{pmatrix} \mid x_{1n}, x_{2n} \in \mathbb{R} \right\} \text{ für } i = 1 \right.$$

$$\left. \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & x_{1n-1} & x_{1n} \\ & \ddots & & 0 \end{pmatrix} \mid x_{1n}, -x_{1n-1} \in \mathbb{R} \right\} \text{ für } i = n-1 \right.$$

$$\left. \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & x_{1n} \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \mid x_{1n} \in \mathbb{R} \right\} \text{ für } 2 \leq i \leq n-2 \right\}$$

Wir wollen nun die Ideale $X_i = \text{Der}(\frac{G}{N_i}, Z(N_i))$ ($i=1, \dots, n-1$) von $\text{Der } G$ betrachten und die inneren Derivationen davon aussortieren.

Für $2 \leq i \leq n-2$ enthält X_i keine inneren Der., denn $Z(N_i) = Z(G)$, deshalb ist $\text{Ider}(\frac{G}{N_i}, Z(G)) = 0$. Sei $Y_i := X_i$.

Wenn $i=1$ oder $i=n-1$, so ist $d \in X_i$ durch das Bild von E_{12} (bzw. $E_{n-1,n}$) bestimmt und diese Derivation ist genau dann inner, wenn das Bild in $[Z(N_i), G] = Z(G)$ liegt:

Für $d \in \text{Ider}(\frac{G}{N_1}, Z(N_1))$ ist $d(E_{12}) \in [E_{12}, Z(N_1)] \leq [G, Z(N_1)] = Z(G)$. Ist umgekehrt $d(E_{12}) \in Z(G)$, z.B. $d(E_{12}) = a \cdot E_{1n}$ ($a \in \mathbb{R}$), so ist

$$d(b \cdot E_{12}) = [b \cdot E_{12}, a \cdot E_{2n}] = [E_{12}, ab \cdot E_{2n}] \quad (b \in \mathbb{R})$$

also $d \in \text{Ider}(\frac{G}{N_1}, Z(N_1))$.

Analog ist $d \in \text{Ider}(\frac{G}{N_{n-1}}, Z(N_{n-1}))$ genau dann, wenn $d(E_{n-1,n}) \in Z(G)$.

Sei Y_i ($i=1, n-1$) ein Komplement zu $\text{Ider}(\frac{G}{N_i}, Z(N_i))$ in der

(abelschen!) Liealgebra X_i . Man setze $Y := \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$ und

$X := Y + \text{Ider } G$. Nach Konstruktion sind beiden Summen direkt (als Vektorraumsummen), Y ist eine Unteralgebra von $\text{Der } G$ und $\text{Ider } G$ ein Ideal. Also:

$$X = Y \oplus [\text{Ider } G], \quad Y \text{ abelsch und } \dim Y = n.$$

Bemerkung:

1) Für $n = 4$, ist $\text{Der } G = D \oplus [X]$, wobei D die Unteralgebra der diagonal wirkenden Derivationen ist, d.h.

$$D = \left\{ d \in \text{Der } G \mid d(x_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = (d_{ij} \cdot x_{ij})_{i,j=1,\dots,n}; d_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

X ist das Nilradikal von $\text{Der } G$.

2) Für $n = 3$, ist G_n extraspeziell. Diese Algebren werden im nächsten Paragraphen betrachtet.

§ 3 Extraspezielle Liealgebren

In diesen Paragraphen sei G eine reelle endlichdimensionale nilpotente Liealgebra der Klasse 2 mit eindimensionalem Zentrum $Z = Z(G)$. Für diese Algebren lassen sich die obigen Ergebnisse nur bedingt übertragen. Ein typischer Vertreter, die sog. Heisenbergalgebra von strikt oberen 3×3 Dreiecksmatrizen besitzt z. B. keine auflösbare Derivationenalgebra mehr. Wir wollen die äußeren Derivation dieser Liealgebren untersuchen und insbesondere die nilpotenten und auflösbaren Radikale angeben.

Man schreibe den Vektorraum von G als direkte Summe $G = Z \oplus V$, wobei $Z := Z(G) \cong \mathbb{R}$ und $V \cong \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Seien p_1 bzw. p_2 die Projektionen auf Z bzw. V und $d \in \text{Der } G$. Definiere:

$$d \cdot p_1 = d|_Z =: h \in \text{Hom}(Z, Z) \text{ und } h(z) = \lambda \cdot z \text{ für } z \in Z \text{ und} \\ \text{einem } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$p_2 \cdot d \cdot p_2 = p_2 \cdot d|_V =: f \in \text{Hom}(V, V)$$

$$p_1 \cdot d \cdot p_2 = p_1 \cdot d|_V =: g \in \text{Hom}(V, Z)$$

$$\text{Weiter sei } F_0 := \{d \in \text{Der } G \mid g = 0\} \quad J := \{d \in \text{Der } G \mid f = 0\}$$

Da $d(Z) \leq Z$ und $p_1 + p_2 = 1 \in \text{Hom}(G, G)$, ist umgekehrt d durch Angabe von h, f, g bestimmt, denn

$$d = d \cdot (p_1 + p_2) = d \cdot p_1 + (p_1 + p_2) \cdot d \cdot p_2 = dp_1 + p_1 dp_2 + p_2 dp_2$$

Die Funktionalgleichung für Derivationen lautet nun

$$(z_i \in Z, v_i \in V; i = 1, 2):$$

$$d[z_1 + v_1, z_2 + v_2] = d[v_1, v_2] = \lambda [v_1, v_2] =$$

$$[d(z_1 + v_1), z_2 + v_2] + [z_1 + v_1, d(z_2 + v_2)] = [\lambda z_1 + g(v_1) + f(v_1), v_2] + \\ [v_1, \lambda z_2 + g(v_2) + f(v_2)] = [f(v_1), v_2] + [v_1, f(v_2)] \quad (1)$$

Daraus erkennt man:

- 1) λ ist durch f festgelegt. Insbesondere folgt aus $f = 0$ auch $\lambda = 0$. Wir schreiben $F(S)$ für die Menge aller f , welche (1) erfüllen mit einem $\lambda \in S$. In diesem Fall ist $S = \mathbb{R}$.
- 2) F_0 ist Unterlgebra: Wenn $d_i \in F_0$ ($i = 1, 2$), so ist $[d_1, d_2](v) = d_1 \cdot d_2(v) - d_2 \cdot d_1(v) \in V$ ($v \in V$)
- 3) g ist beliebig wählbar, d.h. $J = \text{Hom}(V, Z)$ und ist das in Lemma (1.2) beschriebene Ideal in $\text{Der } G$, enthält die inneren Derivationen (siehe Beweis von Satz 1 a) 3) und ist wegen $\dim J = \dim V \cdot \dim Z = n = \dim(\frac{G}{Z})$ sogar gleich $\text{Ider } G$.
- 4) $\text{Der } G = F_0 \oplus [J]$, denn F_0 ist Unterlgebra, J Ideal und $F_0 \cap J = 0$ folgt aus der Definition und 1). Aus der für $d \in \text{Der } G$ angegebenen Zerlegung folgt aber - wieder mit 1) - $\text{Der } G = F_0 + J$.
- 5) $F(0) := \{f \in F(\mathbb{R}) \mid \lambda = 0\} = \{f \in \text{Hom}(V, V) \mid [f(v_1)v_2] = [v_1, f(v_2)]; v_1, v_2 \in V\}$. Da $V \times V \rightarrow Z \cong \mathbb{R}$, $(v_1, v_2) \rightarrow [v_1, v_2]$ eine antisymmetrische, nichtausgeartete Bilinearform auf V definiert, ist $F(0) \cong \text{sp}(n, \mathbb{R})$, der symplektischen Algebra über $\mathbb{R}$ (z.B. [14 ; S.3]). Insbesondere ist n gerade.

Damit hat $F(0)$ folgende Eigenschaften:

- i) Das auflösbare Radikal ist trivial
- ii) Es gibt eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V mit $[e_i, e_{n-i}] = [e_j, e_{n-j}]$ für $1 \leq i, j \leq \frac{n}{2} =: l$ bzgl. der $f \in F(0)$ eine Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ hat, wobei A, B, C, D $l \times l$ -Matrizen sind mit $A^T = -D$, $B^T = B$, $C^T = C$.
- iii) $\dim F(0) = \frac{1}{2}(n+n^2)$
- iv) $\text{spur } f = 0$ für $f \in F(0)$

Diese Basis sei jetzt fest gewählt und lineare Abbildungen werden mit den Matrizen bzgl. dieser Basis identifiziert.

6) Behauptung: $F(\mathbb{R}) = [F(0)] \oplus [D(\mathbb{R})]$ mit

$$D(\mathbb{R}) = \{f \in \text{Hom}(V, V) \mid f = \lambda \cdot 1, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Beweis:

Wegen 5 iv) ist $F(0) \cap D(\mathbb{R}) = 0$. Für $f \in F(\mathbb{R})$ ist $f - (\frac{1}{n} \text{Spur } f) \cdot 1 \in F(0)$ und $(\frac{1}{n} \text{Spur } f) \cdot 1 \in D(\mathbb{R})$, somit $F(\mathbb{R}) = F(0) + D(\mathbb{R})$. Die skalaren Abbildungen $\lambda \cdot 1 \in D(\mathbb{R})$ bilden eine abelsche Liealgebra und erfüllen (1), liegen also in $F(\mathbb{R})$ und zentralisieren dieses; bilden deshalb ein Ideal in $F(\mathbb{R})$. Wegen $[F(0), D(\mathbb{R})] = 0$ ist aber auch $F(0)$ ein Ideal, womit die Behauptung bewiesen ist.

7) Behauptung: $\Psi : F(\mathbb{R}) \rightarrow F_0; f \mapsto (z+v \mapsto z+f(v)) =: f_0 (z \in Z, v \in V; \lambda = \frac{2}{n} \text{Spur } f)$ ist ein Isomorphismus von Liealgebren.

Beweis:

Damit f_0 eine Derivation ist, muß f (1) erfüllen mit $\lambda = \frac{2}{n} \text{Spur } f$. Dies folgt aber aus (1) und 6), denn $f - \frac{\lambda}{2} \cdot 1 \in F(0)$ und setzt man $f = (f - \frac{\lambda}{2} \cdot 1) + \frac{\lambda}{2} \cdot 1$ in (1), so hat man $[\frac{\lambda}{2} v_1, v_2] + [\frac{\lambda}{2} v_1, \frac{\lambda}{2} v_2] = \lambda [v_1, v_2]$ für $v_1, v_2 \in V$, also ist $\frac{2}{n} \cdot \text{Spur } f$ das richtige λ .

Die Abbildung Ψ ist linear, da die Spur dies ist und offenbar bijektiv.

Da $[f, f'] \in F(0)$ ($f, f' \in F(\mathbb{R})$) ist $\Psi([f, f']) = (z+v \mapsto [f, f'](v))$ während $[\Psi(f), \Psi(f')](v+z) = (\lambda \cdot z + f(f'(v))) - ((\lambda') \cdot z + f'(f(v))) = [f, f'](v)$.

Deshalb erhält Ψ auch die Liestruktur.

Setzt man $e_0 := [e_1, e_{n-1}]$ und wählt $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ als Basis von G , so haben die Unteralgebren $J = \text{Ider } G$,

$F_0 = \Psi(F(0)) \oplus \Psi(D(\mathbb{R}))$ folgende Form

$$J = \text{Ider } G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d_1 & \dots & d_n \\ 0 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \mid d_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \right\} \cong \mathbb{R}^n$$

$$F_0(0) := \Psi(F(0)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & B \\ 0 & C & D \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} A^T = -D, B^T = B, C^T = C \\ \text{jeweils } 1 \times 1\text{-Matrizen} \end{array} \right\}$$

$$D_0 := \Psi(D(\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Ist $a \in D_0$ und $b \in \text{Ider } G$, so ist $[a, b] = ab - ba = \lambda \cdot b$,
wobei $\begin{pmatrix} 2\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} = a$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

Wir fassen zusammen:

Satz 3: Sei G eine extraspezielle Liealgebra der Dimension $n + 1$.

Dann gilt:

i) n ist gerade

ii) $\text{Der } G = [\text{Ider } G] \oplus D_0 \oplus F_0(0)$

und $D_0 \cong \mathbb{R}$, $F_0(0) \cong \text{sp}(n, \mathbb{R})$

D_0 wirkt auf $\text{Ider } G$ durch skalare Multiplikation,

$F_0(0)$ auf die natürliche Art und Weise.

iii) $\dim(\text{Der } G) = \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)$

iv) Das auflösbare Radikal A von $\text{Der } G$ ist $[\text{Ider } G] \oplus D_0$

v) Das nilpotente Radikal N von $\text{Der } G$ ist $\text{Ider } G$

vi) Das Zentrum von $\text{Der } G$ ist trivial.

Beweis:

- i) folgt aus 5)
- ii) folgt aus 7)
- iii) Zerlege $\text{Der } G$ gemäß (ii) und addiere die Dimensionen! Für $\dim F_0(0)$ siehe 5).
- iv) $A = [\text{Ider } G] \oplus D_0$ ist als semidirektes Produkt zweier abelscher Liealgebren sicher ein auflösbares Ideal und da $G/A \cong \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ halbeinfache Liealgebra ist, auch das größte.
- v) $N \leq A$, aber da D_0 nicht nilpotent wirkt, ist $N = \text{Ider } G$.
Genauer: Für $a \in D_0$ und $b \in \text{Ider } G$, ist $[a, b] = \lambda \cdot b$ mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{R}$ (siehe 7)), also ist A nicht nilpotent, denn $[A, \text{Ider } G] = \text{Ider } G$.
- vi) $Z(\text{Der } G) \leq N$, aber wie in (v) zeigt man, daß $\text{Ider } G$ nicht zentral ist, also $Z(\text{Der } G) = 0$. $\square$

Kapitel III

Zusammenhängende Gruppen

In diesem Kapitel sei G eine zusammenhängende lokalkompakte Gruppe, $\dim G$ bezeichne die Dimension der Mannigfaltigkeit G , falls G eine Liegruppe ist. Bekanntlich stimmt $\dim G$ mit der Dimension der zu G gehörigen Liealgebra überein. Ist G eine abelsche kompakte Gruppe, dann sei $\dim G$ gleich dem torsionsfreien Rang der Charaktergruppe $\hat{G}$ von G . Da abelsche kompakte Liegruppen isomorph zu T^n sind (vergl. [13; 4.11]) ist diese Definition eindeutig. Wir werden sehen - in (3.5) - daß sie die für uns interessante Klasse der nilpotenten, zusammenhängenden, lokalkompakten Gruppen umfaßt.

Eine zusammenhängende Gruppe heiße extraspeziell, wenn $G' \leq Z(G)$ und $\dim Z(G) = 1$.

Eine Gruppe heiße das semidirekte Produkt (oder die zerfallende Erweiterung) eines Normalteilers N mit einer Untergruppe Q - in Zeichen $G = Q[N]$ - wenn G homöomorph zu $Q \times N$ ist, $G = Q \cdot N$ und $Q \cap N = 1$. Für σ -kompakte Gruppen läßt der topologische Zerfall der Erweiterung von N mit Q einfacher zeigen:

Lemma (3.1): (vergl. [13; 10.3])

Sei G lokalkompakt und σ -kompakt, N abgeschlossener Normalteiler und Q abgeschlossene Untergruppe von G , $G = Q \cdot N$ und $Q \cap N = 1$. Dann ist $G = Q[N]$.

§ 1 Struktur nilpotenter zusammenhängender Gruppen

Eine zusammenhängende Liegruppe ist einfach zusammenhängend, wenn die zugehörige Mannigfaltigkeit dies ist. Wir bevorzugen eine mehr algebraische Charakterisierung:

Lemma (3.2): (vergl. [13; 4.10] und [12; S. 138, Th. 2.3])

Eine nilpotente zusammenhängende Liegruppe ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn sie keine kompakten Untergruppen enthält.

Lemma (3.3): (vergl. [12; S. 135, Th. 1.2])

Ist G eine einfach zusammenhängende Liegruppe, N ein zusammenhängender Normalteiler, dann ist N abgeschlossen und N sowie $\frac{G}{N}$ sind einfach zusammenhängende Liegruppen.

Eine Verallgemeinerung dieses Lemmas läßt sich für auflösbare Gruppen angeben:

Lemma (3.4): (vergl. [12; S. 137, Th. 2,2])

Sei G eine auflösbare, einfach zusammenhängende Liegruppe und U eine zusammenhängende Untergruppe. Dann ist U abgeschlossen und einfach zusammenhängend.

Diese Hilfsmittel werden nun verwendet um die Struktur der nilpotenten zusammenhängenden Gruppen zu beschreiben, auch wenn diese keine Liegruppen sind.

Lemma (3.5): Sei G eine nilpotente, lokalkompakte, zusammenhängende Gruppe. Dann existiert ein maximaler kompakter Normalteiler K mit

- i) G/K ist einfach zusammenhängende Liegruppe
- ii) K ist zusammenhängend und zentral
- iii) K ist charakteristisch in G
- iv) K ist direkter Faktor in jeder K enthaltenden abelschen **zusammenhängenden** Untergruppe von G .

Beweis:

- i) Da G insbesondere auflösbar ist, kann man G durch Liegruppen approximieren und es gibt einen maximalen kompakten Normalteiler K , so daß G/K Liegruppe ist (Iwasawa [15; Th. 10 und Lemma 4.2]). Eine kompakte Untergruppe in G/K aber ist zentral (Hofmann [13; 4.10]), da G/K nilpotent ist, deshalb normal. Da aber K ein maximaler Normalteiler in G ist, kann diese kompakte Untergruppe von G/K nur trivial sein, d.h. G/K ist einfach zusammenhängend (3.2).
- ii) Da G/K keine kompakten Untergruppen besitzt, ist K sogar die maximale kompakte Untergruppe von G . Ist G selbst eine Liegruppe, dann weiß man bereits, daß K zusammenhängend ist (Iwasawa [15; Th. 6]). Auf alle Fälle aber ist G projektiver Limes zusammenhängender nilpotenter Liegruppen, also gibt es eine Familie $\{N_i | i \in I\}$ abgeschlossener Normalteiler in G , so daß $\bigcap_{i \in I} N_i = 1$ und G/N_i Liegruppe ist. Die Zusammenhangskomponente K_0 von K wird bei der Projektion auf G/N_i auf die von $K \cdot N_i / N_i$ abgebildet ([10; 7.12]), also nach dem eben zitierten Satz auf $K \cdot N_i / N_i$, somit ist für alle $i \in I$ $K_0 N_i / N_i = K N_i / N_i$, woraus die Gleichheit von K und K_0 , also der Zusammenhang von K folgt.

Auflösbare, kompakte, zusammenhängende Gruppen sind jedoch abelsch [15 ; Lemma 2.2.], während abelsche kompakte Normalteiler in einer zusammenhängenden Gruppe zentral sind [15 ; Th. 4], womit dieser Punkt bewiesen ist.

- iii) Für $\alpha \in \text{Aut } G$ ist $\alpha(K)$ kompakt , liegt also in K , da G/K keine kompakten Untergruppen besitzt.
- iv) Abelsche zusammenhängende lokalkompakte Gruppen sind von der Form $A = \mathbb{R}^n \otimes C$, mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und C kompakt und zusammenhängend (vergl. [10; 9.14]). Da $\mathbb{R}^n$ keine kompakten Untergruppen besitzt, folgt aus $K \leq A \leq G$ $K = C$. $\square$

Man beachte, daß mit diesem Lemma die Dimension für nilpotente, lokalkompakte, zusammenhängende Gruppen erklärt ist, indem man $\dim G = \dim G/K + \dim K$ setzt.

Lemma (3.6): Sei G lokalkompakte, zusammenhängende Gruppe und N ein nilpotenter zusammenhängender Normalteiler mit $G/N \cong \mathbb{R}$ bzw. T . Dann ist $G = H[N]$, $H \cong \mathbb{R}$ bzw. T .

Beweis:

Wenn N Liegruppe oder N kompakt ist, ist das Lemma bewiesen (Iwasawa [15; Lemma 3.4] bzw. [15; Lemma 4.7]). Ansonsten sei K der maximale kompakte Normalteiler von N , der charakteristisch in N , somit normal in G ist (vergl. Lemma (3.5)). Da G/K Liegruppe und K kompakt ist, existieren abgeschlossene Untergruppen H_1 und H von G , so daß $G/K = H_1/K \left[\frac{N}{K} \right]$ und $H_1 = H[K]$. Das heißt

$$G = H_1 \cdot N, \quad H_1 \cap N \leq K$$

$$H_1 = H \cdot K, \quad H \cap K = 1$$

also

$$G = H \cdot K \cdot N = H \cdot N, \quad H \cap N = H \cap H_1 \cap N = H \cap K = 1$$

Da alle auftretenden Gruppen abgeschlossen in G sind und G

σ -kompakt ist (siehe (3.5)) folgt aus (3.1):

$$G = H[N] \text{ mit } H \cong H_1/K \cong G/N \cong \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{T}. \quad \square$$

§ 2 Homomorphismen zusammenhängender Gruppen

Lemma (3.7): Seien A, B abelsche lokalkompakte Gruppen und

$\hat{A}, \hat{B}$ ihre Charaktergruppen. Dann ist

$$\text{Hom}(A, B) \cong \text{Hom}(\hat{B}, \hat{A}).$$

Beweis:

Sei $f \in \text{Hom}(A, B)$ und $\beta \in \hat{B}$. Definiere $\hat{f}(\beta) := \beta \circ f$. Man rechnet sofort nach, daß $\hat{f}$ homomorph ist und wenn C eine kompakte Teilmenge von A ist, U offene Nullumgebung in T , so ist auch $f(C)$ kompakt und $\hat{f}(W(f(C), U)) \subset W(C, U)$. Also ist $\hat{f}$ stetig und $\hat{f} \in \text{Hom}(\hat{B}, \hat{A})$.

Die Abbildung $f \rightarrow \hat{f}$ ist offenbar homomorph und bijektiv (letzteres folgt z.B. aus $\hat{\hat{f}} = f$ vergl. [10; 24.41]).

Es genügt, die Stetigkeit von $f \rightarrow \hat{f}$ zu zeigen, denn die Stetigkeit der Umkehrabbildung folgt durch Vertauschen von A mit $\hat{B}$ und B mit $\hat{A}$ mit Hilfe der Pontryagin-Dualität.

Um die Übersicht zu behalten, versehen wir alle Teilmengen von $A, B, \hat{A}$ und $\hat{B}$ mit Indizes a, b und mit $\wedge$. Weiterhin vereinbaren wir, daß Mengen C_x ($\hat{C}_x$) jeweils kompakt sind, während $U_x, \hat{U}_x$ und V_x offene Nullumgebungen sind (für $x = a$ oder b).

Man wähle eine Basisumgebung der Null in $\text{Hom}(\hat{B}, \hat{A})$:

$$\begin{aligned} W(\hat{C}_b, \hat{U}_a) &= \{\hat{f} \mid \hat{f}(\beta) \in \hat{U}_a \text{ für alle } \beta \in \hat{C}_b\} = \\ &= \{\hat{f} \mid \beta f(a) \in U \text{ für alle } a \in C_a \text{ und alle } \beta \in \hat{C}_b\} \end{aligned}$$

wobei U eine offene Nullumgebung in T ist und o.E. $\hat{U}_a = W(C_a, U)$ angenommen wird. Zu zeigen ist die Existenz von V_b , so daß für $f \in W(C_a, V_b)$ $\hat{f}$ in $W(\hat{C}_b, \hat{U}_a)$ liegt, d.h. $\beta f(a) \in U$ für alle $a \in C_a$ und $\beta \in \hat{C}_b$. Es genügt also zu beweisen, daß

$$\beta(V_b) \subset U \quad \text{für alle } \beta \in \hat{C}_b \quad (1)$$

Man wähle zunächst ein beliebiges U_b aus B mit $\overline{U}_b$ kompakt und $U' \subset T$ mit $U' + U' \subset U$ (U' offen). Die Mengen $\beta + W(\overline{U}_b, U')$ ($\beta \in \hat{C}_b$) bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge $\hat{C}_b$. Seien $\beta_1, \dots, \beta_n \in \hat{C}_b$ so gewählt, daß $\hat{C}_b \subset \bigcup_{i=1}^n (\beta_i + W(\overline{U}_b, U'))$.

Aus der Stetigkeit der β_i 's folgt die Existenz einer offenen Menge $V_b \subset U_b$ mit $\beta_i(V_b) \subset U'$ für $i = 1, \dots, n$. Ist nun $\beta \in \hat{C}_b$ und $b \in V_b$, so gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und ein $\beta' \in W(\overline{U}_b, U')$ so daß $\beta = \beta_i + \beta'$, d.h.:

$$\beta(b) = \beta_i(b) + \beta'(b) \in U' + U' \subset U$$

womit (1) erfüllt ist. $\square$

Lemma (3.8): Sei G eine Gruppe mit $G/G \cong \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) und K eine abelsche lokalkompakte Gruppe. Dann ist

$$\text{Hom}(G, K) \cong \prod_{n \cdot \dim K} \mathbb{R}.$$

Beweis:

Da $\text{Hom}(G, K) \cong \text{Hom}(G/G, K) \cong \prod_n \text{Hom}(\mathbb{R}, K)$ (vergl. [10; 23.34(c)]), können wir annehmen, daß $G = \mathbb{R}$ ist.

Die stetigen Bilder von $\mathbb{R}$ sind zusammenhängend und liegen in der Einskomponente K_0 von K , weshalb $\text{Hom}(\mathbb{R}, K) = \text{Hom}(\mathbb{R}, K_0)$

ist. Anders ausgedrückt, wir können K als zusammenhängend voraussetzen.

Wir können schließlich noch annehmen, daß K kompakt ist, denn nach (3.5 iv)) ist $K = C \oplus \mathbb{R}^m$ (mit C kompakt und zusammenhängend) und $\text{Hom}(\mathbb{R}, K) = \text{Hom}(\mathbb{R}, C) \oplus \mathbb{R}^m$ (vergl. [10; 23.34 (d)]).

Die Charaktergruppe $\hat{K}$ von K ist eine abelsche, torsionsfreie diskrete Gruppe (vergl. [10; 23.17, 24.25]) vom torsionsfreien Rang $r = \dim K$, während $\mathbb{R}$ isomorph seiner eigenen Charaktergruppe ist. Mit obigem Lemma (3.7) folgt deshalb

$$\text{Hom}(\mathbb{R}, K) \cong \text{Hom}(\hat{K}, \mathbb{R}) \quad (1)$$

Um $\text{Hom}(\hat{K}, \mathbb{R})$ zu berechnen, bette man $\hat{K}$ in einen $\mathbb{Q}$ -Vektorraum der Dimension r ein und schließe aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \hat{K} \rightarrow \bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} \rightarrow P \rightarrow 0$$

mit $P = \bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} / \hat{K}$ Torsionsgruppe, daß auch

$$0 \rightarrow \text{Hom}(P, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}\left(\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}, \mathbb{R}\right) \rightarrow \text{Hom}(\hat{K}, \mathbb{R}) \rightarrow 0$$

exakt ist, denn $\mathbb{R}$ ist divisibel (vergl. [4; 44,5]). Da P Torsionsgruppe ist, also $\text{Hom}(P, \mathbb{R}) = 0$ ist, folgt weiter

$$\text{Hom}(\hat{K}, \mathbb{R}) \cong \text{Hom}\left(\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}, \mathbb{R}\right) \cong \prod_{\mathbb{R}} \text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) \cong \prod_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \quad (2)$$

(vergl. [4; 43.1]). Man beachte, daß hier - da $\hat{K}$ und $\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}$ diskret sind - die Gruppe der stetigen Homomorphismen gleich der vollen Homomorphismengruppe ist.

Zu prüfen bleibt noch, daß der algebraische Isomorphismus von $\text{Hom}(\hat{K}, \mathbb{R})$ auf $\prod_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ tatsächlich ein Homöomorphismus bzgl. der kompakt-offenen und der Produkttopologie ist:

Sei $\{k_i \mid i \in I\}$ eine Basis von $\hat{K}$, dann bilden die Mengen

$$W(J, U) := \{f \in \text{Hom}(\hat{K}, \mathbb{R}) \mid f(k_i) \in U \text{ für alle } i \in J\}$$

eine Umgebungsbasis der Null in $\text{Hom}(\hat{K}, \mathbb{R})$, wobei J die endlichen Teilmengen von I und U die offenen Nullumgebungen von $\mathbb{R}$ durchläuft. Hat man nämlich eine kompakte und somit endliche Menge C in $\hat{K}$ und ist $\Gamma := \{ \lambda_i \mid i \in I \}$ die Menge aller Koeffizienten von Elementen aus C bzgl. der Basis $\{k_i \mid i \in I\}$, so ist

$$J := \{ i \in I \mid \lambda_i \neq 0, \lambda_i \in \Gamma \} \text{ endlich und für } \lambda := \max_{i \in J} \lambda_i \text{ ist}$$

$$W(C, U) \supset W(J, \frac{1}{\lambda \cdot |J|} \cdot U).$$

Unter dem Isomorphismus (2), der einen Homomorphismus auf die Bilder der Basis abbildet, wird $W(J, U)$ auf die Menge $\bigcap_{i \in I} U_i$ abgebildet, wobei $U_i = U$ für $i \in J$ und $U_i = \mathbb{R}$ sonst. Diese Mengen aber bilden ein fundamentales Umgebungssystem der Null in der Produkttopologie. $\square$

Mit dem eben Bewiesenen läßt sich das folgende Lemma nicht nur für Liegruppen, sondern allgemein für zusammenhängende Gruppen zeigen:

Lemma (3.9): Sei G eine nilpotente, zusammenhängende, lokal-kompakte Gruppe und H Teilmenge von G . Dann ist $C_G(H)$ abgeschlossene und zusammenhängende Untergruppe, insbesondere auch $Z(G)$.

Beweis:

a) Wir zeigen die Behauptung zunächst für einfach zusammenhängende Liegruppen; sei G eine solche und $\mathcal{L}(G)$ ihre Liealgebra. Da G nilpotent ist, gibt es eine surjektive Exponentialabbildung von $\mathcal{L}(G)$ auf G und für alle $x \in G$ gibt es ein $X \in \mathcal{L}(G)$ so daß $x = \exp X$. Man sieht, daß G radizierbar ist, denn für $n \in \mathbb{N}$ und $x_n := \exp(\frac{1}{n} X)$ ist $x_n^n = x$. Als einfach zusammenhängende Gruppe enthält G keine kompakten Untergruppen (3.2),

insbesondere also keine Torsionselemente. In einer torsionsfreien nilpotenten Gruppe aber ist das Wurzelziehen eindeutig (vergl. Kurosh [19; S.217]). Ist $x^n \in C_G(H)$ und $h \in H$, also $x^n = h^{-1} x^n h = (h^{-1} x h)^n$, so gilt $h^{-1} x h = x$, d.h. auch $x \in C_G(H)$ und damit die ganze Gruppe $\{\text{expt} \cdot X \mid t \in \mathbb{Q}\}$. Der Zentralisator ist aber sicher abgeschlossen, weshalb er die ganze Einparametergruppe $\{\text{expt} \cdot X \mid t \in \mathbb{R}\}$ enthält. Dies zeigt, daß $C_G(H)$ zusammenhängend ist.

Zentralisiert x die Menge H , so auch die von H erzeugte Untergruppe und sogar deren topologischen Abschluß. Wir wollen ab jetzt der Einfachheit halber annehmen, daß H eine abgeschlossene Untergruppe ist.

- b) Sei nun G eine beliebige nilpotente, zusammenhängende Gruppe und K der maximale kompakte Normalteiler. Wir können annehmen, daß $K \leq H$, denn $C_G(HK) = C_G(H)$ wegen $K \leq Z(G)$.

Sei $L := G/K$ also einfach zusammenhängende Liegruppe und wähle M_1 so, daß $M_1/K = C_L(H/K)$ und $M := C_G(H)$. M_0 sei die Einskomponente von M . Es gilt:

$$M_0 \triangleleft M \triangleleft M_1 \quad (1)$$

denn aus $[M_1, H] \leq K \leq H$ folgt, daß M_1 H normalisiert, deshalb ist für $m_1 \in M_1$, $m \in M$, $h \in H$ und $h' := [h, m_1^{-1}] \in H$

$$[m^{m_1}, h] = [m, m_1 h m_1^{-1}] = [m, h \cdot h'] = 1$$

d.h. $M \triangleleft M_1$.

Der Homomorphismus

$$\varphi : \begin{array}{l} M_1/K \rightarrow \text{Aut } H \\ g \cdot M \rightarrow (h \rightarrow h^g) \end{array}$$

ist wohldefiniert und injektiv, da $M \trianglelefteq H$ zentralisiert. Er ist außerdem stetig, da $M_1 \rightarrow \text{Aut } G$ und $N_{\text{Aut } G}(H) \rightarrow \text{Aut } H$ dies sind (vergl. Braconnier [2; IV § 1, Prop. 4]) und $M_1 \rightarrow M_1/M$ offen ist.

Durch diesen Homomorphismus φ wird M_1/M in eine Untergruppe von $\text{Stab}(K \trianglelefteq H) \leq \text{Aut } H$ abgebildet, da $K \leq Z(G)$ also insbesondere von M_1 zentralisiert wird, während M_1 gerade so gewählt war, daß es H modulo K zentralisiert. Mit Lemma (1.2) und Lemma (3.8) gilt nun

$$\text{Stab}(K \trianglelefteq H) \cong \text{Der}(H/K, K) = \text{Hom}(H/K, K) \cong \prod_{\Gamma} \mathbb{R}$$

mit $r = \dim K \cdot \dim (H/K) / \dim (H/K)$. M_1/M kann deshalb keine kompakten Untergruppen besitzen und ist also einfach zusammenhängend (Beachte, daß M_1 nach a) eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von G ist und daß $K \leq M$ ist, d.h. M_1/M ist Liegruppe).

Die Einskomponente M_0 von M ist charakteristisch in M , somit normal in M_1 . Durch Anwenden von (3.4) erhält man den einfachen Zusammenhang sowohl für M_1/K (als zusammenhängende Untergruppe von $L = G/K$) als auch für M_1/M_0 (als Faktor modulo des zusammenhängenden Normalteilers M_0/K). Da nun M_1/M_0 die einfach zusammenhängende Überlagerung von M_1/M ist, folgt wegen der Eindeutigkeit der Überlagerungsgruppe $M = M_0$ und M ist zusammenhängend. $\square$

§ 3 Automorphismen zusammenhängender Gruppen

Bevor wir den Satz über die äußeren Automorphismen beweisen, sollen die inneren Automorphismen untersucht werden, genauer gesagt, wir zeigen, daß für gewisse Gruppen $\text{Inn}G$ abgeschlossen in $\text{Aut}G$ ist bzgl. der in I § 1 definierten Topologie. Dies ist - wie untenstehendes Beispiel zeigt - keineswegs selbstverständlich. Dieses Problem ist äquivalent zu der Frage, wann die Abbildung $G \rightarrow \text{Aut}G, g \rightarrow c_g$, die stetig ist (vergl. [2, IV 1 Prop.1]) auch einen topologischen Homomorphismus darstellt.

Beispiel: (dieses Beispiel geht auf eines von Hochschild [11] zurück).

Sei $A \cong \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$, $Q \cong \mathbb{R}$ und φ_r sei die Drehung in $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $2\pi r$. Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und die Wirkung von Q auf A definiert durch

$$(x, y)^r := (\varphi_r(x), \varphi_{r\lambda}(y)) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}$$

und sei $G := Q[A]$ bezgl. dieser Wirkung.

Wähle eine Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, so daß $(k_n \cdot \lambda)_{n \in \mathbb{N}} \pmod{1}$ gegen $\frac{1}{3}$ konvergiert, was sicher möglich ist, da λ irrational angenommen ist. Ist $r_n := \frac{1}{n} + k_n$, so konvergiert die durch r_n definierte Folge innerer Automorphismen c_{r_n} gegen

$$\alpha : (q, x, y) \rightarrow (q, x, \varphi_{1/3}(y))$$

da $\varphi_{r_n} \rightarrow \varphi_0$ und $\varphi_{r_n \lambda} \rightarrow \varphi_{1/3}$ strebt. Die punktweise Konvergenz ist hier auch gleichmäßig auf kompakten Mengen; d.h. für jede kompakte Menge C in G und jede offene Einsumgebung U ist

$\alpha^{-1} \circ c_{r_n} \in V(C, U)$ für genügend große $n \in \mathbb{N}$.

Man sieht aber, daß α keine Konjugation mit $r \in \mathbb{Q}$ ist, da die Gleichung $n \cdot \lambda = \frac{1}{3} + m$ für ganze Zahlen n, m nicht lösbar ist. Eine Konjugation mit einem anderen Element scheidet ebenfalls aus, da A abelsch ist (man setze z.B. $q = 0$ und konjugiere mit $(r, 0, 0) \cdot (0, a, b) = (r, a, b)$).

Somit ist $(c_{r_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge innerer Automorphismen, die gegen ein $\alpha \notin \text{Inn}G$ konvergiert und $\text{Inn}G$ ist nicht abgeschlossen. Also:

Es gibt auflösbare, einfach zusammenhängende Liegruppen mit nicht-abgeschlossener Gruppe innerer Automorphismen.

Die Situation verbessert sich, sobald man zum Nilpotenten übergeht:

Satz 4: Sei G eine nilpotente, zusammenhängende, lokalkompakte Gruppe. Ist der Abschluß von $\text{Inn}G$ lokalkompakt, so ist $\text{Inn}G$ eine nilpotente, einfach zusammenhängende Liegruppe, die in $\text{Aut}G$ abgeschlossen ist.

Beweis:

Wir können annehmen, daß G nicht abelsch ist. Sei $I := \overline{\text{Inn}G}$. $\text{Inn}G$ ist als stetiges Bild von $\frac{G}{Z(G)}$ zusammenhängend und nilpotent; dasselbe gilt also auch für I (vergl. [13; 11.2]).

Sei C die maximale kompakte Untergruppe in I (siehe (3.5)), dann liegt C im Zentrum von I . Ist $\alpha \in C$ und $c_g \in \text{Inn}G$, dann gilt also

$$1 = [\alpha^{-1}, c_g^{-1}] = c_{g^{-1}\alpha(g)} \quad \text{also } g^{-1}\alpha(g) \in Z(G)$$

Das bedeutet α induziert auf $\frac{G}{Z}$ den trivialen Automorphismus.

Wenn $\alpha \in \text{Inn}G \cap C$, dann wirkt α auch auf das Zentrum trivial, d.h. $\alpha \in \text{Stab } Z$. Letztere Gruppe aber ist ein abgeschlossener Normalteiler in $\text{Aut}G$, deshalb ist $C \cap \text{Stab } Z$ kompakt und enthält $C \cap \text{Inn}G$.

Da $(G/Z)'$ zusammenhängend ist (vergl. [15; Lemma 2.1]) und G/Z eine einfach zusammenhängende Liegruppe ist (3.5), ist nach (3.3) $(G/Z)/(G/Z)'$ einfach zusammenhängend, also topologisch isomorph einer Vektorgruppe $\mathbb{R}^n$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$. Beachte, daß $n \geq 1$ ist, weil G als nicht-abelsche Gruppe angenommen wurde. Mit (1.2) und (3.8) ist $\text{Stab } Z \cong \text{Hom}(G/Z, Z) \cong \prod_{n \cdot \dim Z} \mathbb{R}$ weshalb $\text{Stab } Z$ keine kompakten Untergruppen besitzt, d.h.

$$C \cap \text{Stab } Z = C \cap \text{Inn}G = 1$$

Die Quotientenabbildung $I \rightarrow I/C$ bildet somit $\text{Inn}G$ injektiv auf eine dichte zusammenhängende Untergruppe in I/C ab. Da I/C aber jetzt eine einfach zusammenhängende Liegruppe ist, muß der zusammenhängende Normalteiler $\text{Inn}G \cdot C/C$ abgeschlossen sein (3.3), also gleich I/C . Damit hat man einen stetigen (abgebraschen) Isomorphismus

$$G/Z \rightarrow \text{Inn } G \rightarrow \text{Inn } G \cdot C/C = I/C$$

wobei I/C eine abgeschlossene Untergruppe von $\text{Aut}G/C$ ist (beachte, daß C charakteristisch in I , also normal in $\text{Aut}G$ ist). Damit ist dies aber nach dem bekannten Satz über offene Abbildungen (vergl. [23; S. 132]) auch ein topologischer Isomorphismus, denn G/Z und I/C sind lokalkompakt und G/Z ist σ -kompakt. Insbesondere ist $G/Z \cong \text{Inn}G$ und $\text{Inn}G$ ist eine nilpotente, einfach zusammenhängende Liegruppe. $\square$

Korollar 4a: Ist G eine nilpotente, zusammenhängende Liegruppe, so ist $\text{Inn}G$ abgeschlossen.

Beweis:

$\text{Aut}G$ ist bekanntlich eine abgeschlossene Untergruppe einer linearen Gruppe, also selbst Liegruppe und somit lokalkompakt. Die Topologie als Liegruppe stimmt mit der von uns benutzten Topologie überein (vergl. [12; S. 98, Th. 1.2]). $\square$

Wir wollen jetzt den Hauptsatz dieses Kapitels beweisen:

Satz 5: Sei G eine nilpotente, lokalkompakte, zusammenhängende Gruppe, die weder abelsch noch extraspeziell ist. Dann existieren Untergruppen X und Y von $\text{Aut}G$ mit

- i) X enthält $\text{Inn}G$ und ist normal in $\text{Aut}G$
- ii) X ist nilpotent der Klasse $c \leq c_1(G)$
- iii) Y ist abgeschlossene Untergruppe von $\text{Aut}G$,

$$Y \cong \prod_{\dim Z(G)} \mathbb{R}, \quad Y \leq X \text{ und } Y \cap \text{Inn}G = 1.$$

Insbesondere ist also $\dim \text{Fit}(\text{Aut}G) \geq \dim G$.

Beweis:

I. Annahme: Jede charakteristische, abelsche, zusammenhängende Untergruppe liege im Zentrum $Z := Z(G)$.

Nach Lemma (3.9) ist $Z(G')$ zusammenhängend, liegt also nach dieser Annahme in Z . Wie in (1.5) folgt $G' \leq Z$. Setze $X := \text{Stab } Z \cong \text{Hom}(\frac{G}{Z}, Z)$ (1.2), so ist $X \triangleleft \text{Aut}G$, abelsch und enthält $\text{Inn}G$.

Wegen (3.8) und $\frac{G}{Z} \cong \mathbb{R}^n$ gilt:

$$X \cong \text{Hom}(\mathbb{R}^n, Z) \cong \prod_{n \cdot \dim Z} \mathbb{R}$$

Die Gruppe der inneren Automorphismen läßt sich in naheliegender Weise zu einem Vektorraum machen:

Sei $g \in G$ und c_g die Konjugation mit g , dann hängt c_g nur von der Nebenklasse $g + Z \in G/Z \cong \mathbb{R}^n$ ab. Man wähle ein Element x der Nebenklasse von $\lambda (g + Z)$ aus und definiere $\lambda \cdot c_g := c_x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Damit wird $\text{Inn}G$ ein endlichdimensionaler Teilraum von X und es existiert ein Komplement Y zu $\text{Inn}G$ und beide Unterräume sind abgeschlossen (vergl. [17; S.239]). Die Dimension von $\text{Inn}G$ ist gleich $\dim G/Z = n$, weshalb $Y \cong \prod_{\mathcal{M}} \mathbb{R}$ mit $m + n = n \cdot \dim Z$, also $m = (\dim Z - 1) \cdot n \geq \dim Z$, außer wenn $n = 1$ oder $\dim Z = 1$. Diese Fälle aber sind ausgeschlossen, da $\dim Z = 1$ extraspeziell bedeutet und für $n = 1$ $G = Q[Z]$ mit $Q \cong \mathbb{R}$ nach (3.6), was aber heißt, daß G abelsch ist, denn Q wirkt ja trivial auf Z .

Y enthält also eine zu $\prod_{\dim Z} \mathbb{R}$ isomorphe Untergruppe und erfüllt alle Bedingungen.

II. Man kann also die Existenz einer charakteristischen, abelschen, zusammenhängenden Untergruppe A annehmen mit $Z < A$. Wähle A maximal mit diesen Eigenschaften. Sei $M := C_G(A)$, dann ist auch M charakteristisch, abgeschlossen und zusammenhängend nach (3.9) und $Z(M) = A$, denn sonst wäre $Z(M) \cdot A$ eine der Maximalität von A widersprechende Untergruppe.

$X := (\text{Stab } A \cap \text{Stab } M) \cdot \text{Inn}G$ ist nun nach (1.2.v) und (1.4) ein nilpotenter Normalteiler in $\text{Aut } G$ der Nilpotenzklasse $c \leq c_1(G)$.

Da $M < G$, ist $1 \neq G/M / (G/M)$, und diese Gruppe ist isomorph einer Vektorgruppe. Wähle darin eine Hyperebene und definiere N als das Urbild in G , d.h. nach (3.6)

$$G = Q[N] \quad , \quad Q \cong \frac{G}{N} \cong \mathbb{R}, \quad M \leq N$$

$C_G(N)$ ist zusammenhängend (3.9), also auch dessen Bild in Q . Letztere Gruppe aber enthält nur 1 und Q als zusammenhängende Untergruppen, wobei $Q \leq C_G(N) \leq Z \leq A \leq M \leq N$ zur Folge hätte, was paradox ist. Sei $B := C_G(N) = Z(N)$.

1. Fall: $C_G(B) = G$, also $B = Z$.

$$\text{Setze } Y := \text{Stab } B \cap \text{Stab } N \cong \text{Hom}(Q, Z) \cong \prod_{\dim Z} \mathbb{R}$$

Sei $c_g \in \text{Inn}G \cap \text{Stab } N$, so ist $g \in C_G(N) = B = Z$, also $c_g = 1$ und $\text{Inn}G \cap Y = 1$. Da $B \leq A$, $M \leq N$ ist $Y \leq X$ und Y leistet das Verlangte.

2. Fall: $C_G(B) < G$, dann ist (wie oben) $C_G(B) \leq N$ und damit sogar $C_G(B) = N$ (denn $B = Z(N)$). Man kann nun Lemma (1.2) anwenden:

$$\text{Stab } B \cap \text{Stab } N \cong \text{Der}(Q, B),$$

$$\text{Stab } B \cap \text{Stab } N \cap \text{Inn}G \cong \text{Ider}(Q, B)$$

$$\text{Wir werden zeigen } \text{Der}(Q, B) = \text{Ider}(Q, B) \oplus D,$$

$$D \cong \prod_{\dim Z} \mathbb{R} \text{ und } D \text{ abgeschlossen in } \text{Der}(Q, B). \text{ Die zu}$$

$$D \text{ isomorphe Untergruppe von } \text{Stab } B \cap \text{Stab } N \leq X$$

nenne man Y . Auch dieses Y leistet das Gewünschte.

Der Satz ist also bewiesen, wenn die Existenz eines abgeschlossenen Komplementes $D \cong \prod_{\dim Z} \mathbb{R}$ zu $\text{Ider}(Q, B)$ in

$\text{Der}(Q, B)$ gezeigt ist. Wir berechnen zunächst $\text{Der}(Q, B)$ für einfach zusammenhängende Liegruppen (A), wobei sogar eine explizite Angabe dieser Derivationen konstruiert wird. In (B) wird dann der allgemeine Fall behandelt.

A) Sei G einfach zusammenhängende Liegruppe.

Als abelscher zusammenhängender Normalteiler von G ist B eine Vektorgruppe und ein Q -Modul mit der Darstellung $q \rightarrow c_q$ von $Q \rightarrow \text{Aut } B = \text{GL}(B)$. Diese Wirkung ist unipotent, da G nilpotent ist,

$$\text{d.h. } (-1 + c_q)^N(b) = [\dots [\underbrace{b, q}_N q] \dots] = 1$$

falls $N = \text{cl}(G)$, $b \in B$, $q \in Q$.

Wir schreiben jetzt B additiv und identifizieren Q mit $\mathbb{R}$; $b^q := c_q(b)$ für $b \in B$, $q \in Q$. Bzgl. einer geeigneten Basis von B entspricht c_q einer Matrix C_q aus $\text{UT}(B)$ und

$$C_q = \exp(q \cdot W) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (q \cdot W)^n \quad (1)$$

wobei W eine strikt obere Dreiecksmatrix darstellt.

Stetige Automorphismen von Liegruppen sind sogar analytisch (vergl. [12; S. 84, Th. 4.2]), deshalb auch die Derivationen $-1 + \alpha \in \text{Der}(Q, B)$ ($\alpha \in \text{Stab } N \cap \text{Stab } B$). Man differenziere die Funktionalgleichung für Derivationen:

$$d'(t) = \left. \frac{d}{ds} d(s+t) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} (d(s)^t + d(t)) \right|_{s=0} = d'(0)^t$$

Deshalb

$$d(s) = d(s) - d(0) = \int_0^s d'(t) dt = \int_0^s \exp(t W) d'(0) dt =$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{s^n}{n!} W^{n-1} (d'(0)) = \underline{\Phi}(s) d'(0) \quad (2)$$

Für $s \neq 0$ ist $\underline{\Phi}(s) \in GL(B)$ und hat die Form

$$\underline{\Phi}(s) = s \cdot \mathbf{1}_B + s^2 \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{s^{n-1}}{(n+1)!} W^n \right) = s \cdot \mathbf{1}_B + s^2 W_0(s)$$

wobei $W_0(s)$ eine strikt obere Dreiecksmatrix ist.

a) $\text{Der}(Q, B) \rightarrow B$

$\psi : d \rightarrow d'(0)$ ist ein topologischer Isomorphismus:

Als Gruppe von Abbildungen nach B ist $\text{Der}(Q, B)$ ein reeller Vektorraum und die Abb. ψ ist linear, da die Ableitung dies ist. Bijektivität folgt aus (2), da $\underline{\Phi}(s) \in GL(B)$ für $s \neq 0$.

b) $\psi(\text{Ider}(Q, B)) = W(B)$:

Sei $d(q) = (-1 + c_q)(b)$ für $q \in Q$ und einem $b \in B$. Man differenziere diese Gleichung:

$$\psi(d) = \frac{d}{dq} d(q) \Big|_{q=0} = \frac{d}{dq} (-1 + c_q) b \Big|_{q=0} =$$

$$= \frac{d}{dq} \exp(q \cdot W) b \Big|_{q=0} = Wb$$

Ist umgekehrt $b = Wb'$ mit $b' \in B$, dann gilt für $\psi^{-1}(b)$:

$$d(q) \stackrel{(2)}{=} \sum_{n=1}^N \frac{q^n}{n!} W^{n-1}(b) = \sum_{n=1}^N \frac{q^n}{n!} W^n(b') =$$

$$= (-1 + \sum_{n=0}^N \frac{q^n}{n!} W^n) b' = (-1 + c_q) b'$$

also $d = \psi^{-1}(b) \in \text{Ider}(Q, B)$.

Zerlegt man nun B in die direkte Summe $W(B) \oplus V$ mit einem Komplement V , so ist $\text{Der}(Q, B) = \text{Ider}(Q, B) \oplus D$ mit $D = \psi^{-1}(V)$. Zu zeigen bleibt nur noch

c) $\dim V = \dim Z$:

$$Z = \{b \in B \mid b^g = b \text{ für alle } g \in G\} =$$

$$\{b \in B \mid b^q = b \text{ für ein } 0 \neq q \in Q\} =$$

$$\operatorname{Ker}(-1 + c_q) = \operatorname{Ker}\left(\sum_{n=1}^N \frac{q^n}{n!} W^n\right) = \operatorname{Ker} W$$

Da $\dim B < \infty$ folgt weiter

$$\dim V = \dim B - \dim W(B) = \dim(\operatorname{Ker} W) = \dim Z$$

Damit ist der Satz 5 für einfach zusammenhängende Liegruppen gezeigt. Die Konstruktion äußerer Automorphismen wird im nächsten Paragraphen anhand der unipotenten Matrizen demonstriert.

B) G besitze eine kompakte Untergruppe K .

Man wähle für K die maximale kompakte Untergruppe (siehe (3.5)) dann ist K charakteristisch und $K \leq Z$; G/Z ist einfach zusammenhängende Liegruppe. Sei $V := B/Z \cong \mathbb{R}^1$ ($1 \in \mathbb{N}$). Wir zeigen, daß

$$0 \rightarrow \operatorname{Der}(Q, Z) \xrightarrow{i^*} \operatorname{Der}(Q, B) \xrightarrow{p^*} \operatorname{Der}(Q, V) \rightarrow 0 \quad (3)$$

eine exakte Sequenz mit topologischen Homomorphismen i^* und p^* ist.

Aus der Definition $i^*(d) = i \circ d$, $p^*(d) = p \circ d$ mit

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} V \rightarrow 0 \quad \text{folgt der algebraische Teil bis auf die}$$

Surjektivität von p^* . Die Bilder offener Nullumgebungen aus $\operatorname{Der}(Q, Z)$ (bzw. $\operatorname{Der}(Q, B)$) aber sind Mengen der Form $W(C, i(U))$ (bzw. $W(C, p(U))$), woraus ersichtlich ist, daß i^* und p^*

topologische Homomorphismen sind. Es bleibt die Surjektivität von p^* zu zeigen, was wie in der Kohomologietheorie (diskreter)

Gruppen aus der Projektivität von $Q \cong \mathbb{R}$ folgt:

Nebenbehauptung: R ist projektiv in der Klasse der nilpotenten zusammenhängenden lokalkompakten Gruppen.

Beweis:

Seien G und H Gruppen dieser Klasse, $\beta \in \text{Hom}(G, H)$ surjektiv und α ein topologischer Homomorphismus von R in H , also ist $\alpha(R)$ isomorph R , T oder 1 . Nach (3.6) zerfällt $\beta^{-1}(\alpha(R))$ über $\text{Ker } \beta$, d.h. es gibt einen topologischen Homomorphismus γ , der

$$\begin{array}{ccccc} & & R & & \\ & \swarrow \gamma & \downarrow \alpha & & \\ G & \xrightarrow{\beta} & H & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

kommutativ macht ($\beta \gamma = \alpha$), was heißt, daß R projektiv ist.

p^* ist surjektiv:

Sei $d \in \text{Der}(Q, V)$ gegeben, dann ist $1+d \in \text{Stab}(V \triangleleft H_V)$ wie in (1.2), wobei $H_V := Q[V]$. Man betrachte $1+d|_Q$ als Homomorphismus von Q nach H_V . Sei weiter $H_B := Q[B]$ und

$$\begin{aligned} \beta: \quad H_B &\longrightarrow H_V \longrightarrow 1 \\ (q, b) &\longrightarrow (q, p(b)) \end{aligned}$$

der kanonische Epimorphismus. Da H_B und H_V als abgeschlossene zusammenhängende Untergruppen von G nilpotent und lokalkompakt sind, läßt sich mit obiger Nebenbehauptung α_d finden, so daß

$$\begin{array}{ccccc} & & Q & & \\ & \swarrow \alpha_d & \downarrow 1+d & & \\ H_B & \xrightarrow{\beta} & H_V & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

kommutativ wird, insbesondere ist $\alpha_d(q) = (q, b)$ mit geeignetem $b \in B$ und für alle $q \in Q$. Definiere d' durch

$$\alpha_d(q) = (q, d'(q))$$

so rechnet man sofort nach, daß $d' \in \text{Der}(Q, B)$ und $p^*(d') = d$.

Wir wissen nun:

i) $\text{Der}(Q, V) = \text{Ider}(Q, V) \oplus D_1'$ nach Teil A mit $n = \dim D_1' = \dim Z(\frac{G}{Z})$.

ii) $\text{Der}(Q, Z) = \text{Hom}(Q, Z) \cong \prod_{\dim Z} \mathbb{R}$. Derivationen in $\text{Ider}(Q, B)$

werden induziert von Elementen aus $V = \frac{B}{Z}$, weshalb sich $\text{Ider}(Q, B)$ zu einem Vektorraum machen läßt und

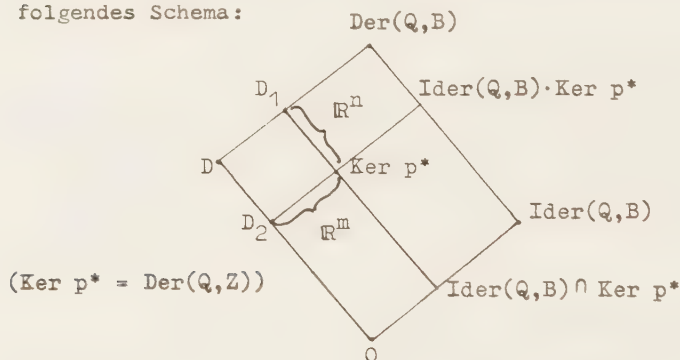
$\text{Ider}(Q, B) \cap \text{Der}(Q, Z)$ ein endlich-dimensionaler Teilraum von $\text{Der}(Q, Z)$ ist. Damit existiert eine abgeschlossene

Untergruppe D_2 mit $\text{Der}(Q, Z) = D_2 \oplus (\text{Ider}(Q, B) \cap \text{Der}(Q, Z))$.

Um diese Kenntnisse zu dem gewünschten Ergebnis

$\text{Der}(Q, B) = D \oplus \text{Ider}(Q, B)$ zusammenzusetzen, betrachte man

folgendes Schema:



D_1 sei das Urbild von D_1' in $\text{Der}(Q, B)$. Da Q auf Z trivial wirkt, ist $\text{Ider}(Q, V)$ das Bild von $\text{Ider}(Q, B)$:

$$p^*(q \rightarrow [q, b]) = (q \rightarrow p[q, pb]) = p[q, b]$$

Damit ist $\text{Ider}(Q, B) \cdot \text{Ker } p^* / \text{Ker } p^* \cong \text{Ider}(Q, V)$ und das obere Viereck zerfällt wegen i).

Das untere Viereck zerfällt wegen ii), wobei wir zusätzlich

erhalten: $\text{Ker } p^* / D_2 \cong \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$). Aus Teil A) folgt aber auch $D_1' = D_1 / \text{Ker } p^* \cong \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), so daß deswegen D_1 / D_2 zerfällt in $D / D_2 \oplus \text{Ker } p^* / D_2$ mit einer abgeschlossenen Untergruppe D von

$\text{Der}(Q, B)$. Man rechnet nun leicht nach, daß D das Verlangte leistet und es bleibt nur zu zeigen $\prod_{\dim Z} \mathbb{R} \cong D$. Ist $\dim Z$ unendlich, so ist $D_2 \cong \text{Ker } p^* \cong \prod_{\dim Z} \mathbb{R}$ und da $D_2 \leq D$ ist alles bewiesen. Falls jedoch $\dim Z < \infty$, dann hat D_2 die Dimension $\dim Z - m$ und D zerfällt über D_2 , hat also die Form $D \cong \prod_n \mathbb{R} \oplus \prod_{\dim Z - m} \mathbb{R}$. Es genügt zu zeigen $n = m$.

Nach A) ist $n = \dim Z(\frac{G}{Z})$. Betrachte

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow \text{Ider}(Q, B) \\ \psi: b &\longrightarrow d_b = (q \rightarrow [q, b]) \end{aligned}$$

Dann liegt d_b in $\text{Der}(Q, Z)$ genau dann, wenn $[q, b] \in Z$ für alle $q \in Q$, was aber äquivalent zu $b \in Z_2(G)$ ist. $\text{Ker } \psi = Z$. Deshalb induziert ψ eine lineare Abbildung

$Z_2(G)/Z \rightarrow \text{Ider}(Q, B) \cap \text{Der}(Q, Z)$, welche bijektiv ist, also $\dim(\text{Ider}(Q, B) \cap \text{Der}(Q, Z)) = \dim Z_2(G)/Z = \dim Z(\frac{G}{Z}) = n$, womit $m = n$ gezeigt ist. Dies schließt den Beweis von Satz 5. $\square$

§ 4 Beispiele

In diesem Paragraphen soll die Konstruktion äußerer Automorphismen am Beispiel der oberen Dreiecksmatrizen illustriert werden (vergl. Kap. II § 2). Definiere:

$$\begin{aligned} E_{ij} &:= \begin{pmatrix} 0 & \dots & j & \dots & 0 \\ & & 1 & \dots & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i, \text{ die Matrix } (x_{kl})_{k,l=1,\dots,n} \text{ mit} \\ &\quad x_{kl} = \delta_{ki} \cdot \delta_{lj} \\ G &:= \left\{ x = \begin{pmatrix} 1 & & x_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \mid x_{ij} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} \cdot E_{ij} + 1 \mid x_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$N_i := \{x \in G \mid x_{i,i+1} = 0\}$ ist Normalteiler in G ($1 \leq i \leq n-1$)

$$B_i := Z(N_i) = \begin{cases} \{1 + x_{1n} \cdot E_{1n} + x_{2n} \cdot E_{2n} \mid x_{1n}, x_{2n} \in \mathbb{R}\} & \text{für } i=1 \\ \{1 + x_{1n} \cdot E_{1n} + x_{1,n-1} \cdot E_{1,n-1} \mid x_{1n}, x_{1,n-1} \in \mathbb{R}\} & \text{für } i=n-1 \\ \{1 + x_{1n} \cdot E_{1n} \mid x_{1n} \in \mathbb{R}\} = Z(G) & \text{für } 2 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

$Q_i := \{1 + q \cdot E_{i,i+1} \mid q \in \mathbb{R}\}$ ist abelsche Untergruppe von G .

Es gilt für alle i $G = Q_i [N_i]$.

a) $i=1$ oder $i=n-1$

Betrachte B_1 und B_{n-1} als 2-dimensionalen reellen Vektorraum

mit der Basis e_1, e_2 wobei $e_1 := 1 + E_{1n}$, $e_2 := 1 + E_{2n}$

(bzw. $1 + E_{1,n-1}$). Q_i wirkt auf B_i durch $c_q = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wenn

$x_q = 1 + q \cdot E_{i,i+1} \in Q_i$. Durch Integration erhält man die, die Derivationen bestimmende Matrix

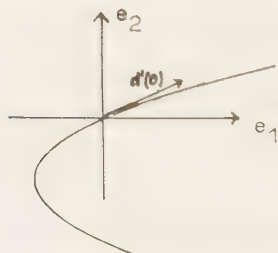
$$\Phi(q) = \begin{pmatrix} q & \frac{1}{2}q^2 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \quad d(x_q) = \Phi(q) d'(0).$$

Das Bild von Q_i unter einer Derivation $d \in \text{Der}(Q_i, B_i)$ ist

eine Parabel in der euklidischen Ebene B_i . Liegt die Tangente

dieser Parabel im Nullpunkt - also $d'(0)$ - in $[B_i, G] = Z(G)$,

so ist d eine innere Derivation und die Parabel ist ausgeartet.



$$\begin{aligned} d(x_q) &= \Phi(q) d'(0) = \begin{pmatrix} q & \frac{1}{2}q^2 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q\lambda_1 + \frac{1}{2}q^2\lambda_2 \\ q\lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wenn $d'(0) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \in B_i$

Bemerkung: $[B_i, G]$ stimmt hier zufällig mit $Z(G)$ überein!

Es gilt $\text{Der}(Q_i, B_i) = \left\{ d \in \text{Der}(Q_i, B_i) \mid d(x_Q) = \lambda \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \oplus$
 $\left\{ d \in \text{Der}(Q_i, B_i) \mid d(x_Q) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ 2 & a \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
 $= \text{Ider}(Q_i, B_i) \oplus D_i$ mit $D_i \cong \mathbb{R}$.

Sei Y_i die zu D_i isomorphe Untergruppe von $\text{Aut } G$ nach (1.2)), dann ist $Y_i \cap \text{Inn}G = 1$.

b) Für $2 \leq i \leq n-2$ wirkt Q_i trivial auf $B_i = Z(G)$ und $\text{Der}(Q_i, B_i) = \text{Hom}(Q_i, B_i)$, wobei alle Derivationen äußere sind. Sei Y_i die zu $\text{Der}(Q_i, B_i)$ isomorphe Untergruppe von $\text{Aut } G$, dann ist auch hier $Y_i \cap \text{Inn}G = 1$, da $C_G(N_1) = Z$ ist.

c) Wenn $n \geq 4$, dann ist $Z_2(G)$ abelsche, charakteristische Untergruppe von G , $X := \text{Stab } G' \cap \text{Stab } Z_2(G)$ ein abelscher abgeschlossener Normalteiler in $\text{Aut } G$ der alle Y_i ($i=1, \dots, n-1$) enthält. Setze $Y := \prod_{i=1}^{n-1} Y_i \cong \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{R}$, dann ist $Y \cap \text{Inn}G = 1$.

Beachte, daß Y das direkte Produkt der Y_i ist. Explizit:

$Y = \left\{ \alpha \in \text{Aut } G \mid \alpha(g) = g \cdot a_g, \text{ wobei} \right.$

$$a_g = 1 + g_{n-1, n} \cdot \lambda_{n-1} \cdot E_{1, n-1} + g_{12} \cdot \lambda_1 \cdot E_{2n} +$$

$$\left(\sum_{i=2}^{n-2} \lambda_i \cdot g_{i, i+1} + \frac{1}{2} \lambda_1 \cdot g_{12}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{n-1} \cdot g_{n-1, n}^2 \right) \cdot E_{1n} \text{ mit } \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \Big\}$$

Bemerkung: Y ist kein Normalteiler in $\text{Aut } G$, allerdings

$Y \cdot \text{Inn}G \trianglelefteq \text{Aut } G$. Aus Satz 2 kann man schließen, daß die Einskomponente von $\text{Aut } G$ auflösbar ist, denn die Liealgebra von $\text{Aut } G$ ist $\text{Der } G$ (vergl. [13; 9.8]). Für $n \leq 3$ ist G abelsch ($n = 2$) oder extraspeziell ($n = 3$). Letztere Art von Gruppen wird im nächsten Paragraphen ausführlich behandelt.

§ 5 Extraspezielle zusammenhängende Gruppen

Nach Definition ist G extraspeziell und zusammenhängend, wenn $G' \leq Z(G) =: Z$ und $\dim Z = 1$. Wir schreiben G multiplikativ, den Vektorraum $V := G/Z \cong \mathbb{R}^n$ jedoch additiv. Jeder Automorphismus α induziert auf V einen Automorphismus $\bar{\alpha}$ und

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut } G & \longrightarrow & \text{Aut } V \\ \Psi: & \alpha & \longrightarrow \bar{\alpha} \end{array} \quad (1)$$

ist ein stetiger Homomorphismus (Braconnier [2; IV 1, Prop. 5]) aber - wie wir sehen werden - i.A. kein topologischer Homomorphismus. $\text{Ker } \Psi \cap C_{\text{Aut } G}(Z) = \text{Stab } Z$ und $\text{Inn } G \leq \text{Stab } Z$. $\text{Inn } G$ ist, wie bereits gezeigt, ein linearer Teilraum von $\text{Stab } Z \cong \text{Hom}(V, Z) \cong \mathbb{R}^n$ und aus Dimensionsgründen sogar gleich $\text{Stab } Z$. Das Problem ist also $C_{\text{Aut } G}(Z)/\text{Inn } G$ und $\text{Aut } G/C_{\text{Aut } G}(Z)$ zu bestimmen.

1) Struktur extraspezieller Gruppen

Sei K der maximale kompakte Normalteiler von G . K ist zusammenhängend und zentral (3.5), $Z = \mathbb{R}^k \otimes K$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a) Ist $\dim K = 0$, dann ist auch $K = 1$, $Z \cong \mathbb{R}$ und G ist einfach zusammenhängend. Es gilt: $\text{Aut } Z = \text{Aut } \mathbb{R} \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{R}$.

b) Ist $\dim K = 1$ und $Z = K \cong T$, dann ist G Liegruppe und $\text{Aut } Z = \{\pm 1\}$

c) Sei $\dim K = 1$ und $K \neq T$. Da $\dim Z = 1$, folgt $Z = K$. Die Charaktergruppe $\hat{K}$ von K ist eine torsionsfreie, diskrete Gruppe vom Rang 1, aber nicht isomorph $\mathbb{Z}$, da $K \neq T$. In diesem Fall ist K ein (eindimensionales) Solenoid. Eine ausführliche Diskussion dieser Gruppen findet man bei Hewitt-Ross [10; § 25]. Die für uns wichtigste Eigenschaft ist die Existenz einer dichten Untergruppe, die eindeutig bestimmt und stetiges, injektives Bild von $\mathbb{R}$ ist. $\text{Aut } K$ ist topologisch isomorph $\text{Aut } \hat{K}$ (vergl. [2; IV 1, Th.2]) und

damit eine multiplikative Untergruppe von $\mathbb{Q}$ (Fuchs [4; 113, Ex. 5]), die auf K (und genauso auf K) durch Multiplikation wirkt. Für $x \in K$ ist $V(\{x\}, \{0\})$ eine offene Einsumgebung in $\text{Aut } K$, aber $V(\{x\}, \{0\}) = 1$, d.h. $\text{Aut } K$ ist diskret.

In allen 3 Fällen haben wir somit einen stetigen Homomorphismus $\rho: \mathbb{R} \rightarrow Z$ und ρ ist entweder bijektiv (in a)) oder surjektiv (in b)) oder injektiv (in c)). $\text{Aut } Z$ ist jeweils eine multiplikative Untergruppe von $\mathbb{R}$ und wir wollen $\alpha \in \text{Aut } Z$ mit seiner Wirkung ($z \rightarrow z^\alpha$) identifizieren.

2) Die Kommutatorform auf V

Für $x, y \in G$ bezeichne $\bar{x} = xZ$, $\bar{y} = yZ$ die Nebenklassen modulo Z . Definiere:

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) := \varphi_y(\bar{x}) := [x, y]$$

φ ist stetig und additiv in beiden Variablen, da $\text{cl}(G) = 2$;

$\varphi_y \in \text{Hom}(V, Z)$ und nach (3.8) ist $\text{Hom}(V, \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(V, Z)$;

$\alpha \rightarrow \rho \alpha$ mit $\rho \in \text{Hom}(\mathbb{R}, Z)$ fest (siehe oben). Ist $Z \cong \mathbb{R}$, so wählen wir - um Z multiplikativ schreiben zu können - für ρ die Exponentialabbildung. Für alle φ_y gibt es nun ein

$\varphi_y^* \in \text{Hom}(V, \mathbb{R})$, so daß $\varphi_y = \rho \varphi_y^*$

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \varphi_y^*(\bar{x}) =: \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$$

definiert eine Bilinearform auf V , die nicht ausgeartet ist, denn $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$ für alle $y \in G$ heiße $1 = \rho \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = [x, y]$ für alle $y \in G$, also $x \in Z$ und $\bar{x} = 0$.

Weiterhin ist $\rho(\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle) = [x, y][y, x] = 1$. (2)

Falls ρ nicht injektiv ist, also $Z \cong T$, ist $\text{Ker } \rho \cong \mathbb{Z}$. Da

(2) für alle $\bar{x} \in V$ gilt, erhält man mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\langle \lambda \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \lambda \bar{x} \rangle = \lambda (\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle) \in \text{Ker } \rho$$

was aber nur dann möglich ist, wenn die rechte Seite verschwindet. In allen Fällen folgt also, daß $\langle , \rangle$ antisymmetrisch ist.

Bekanntlich existiert für V eine symplektische Basis

$$\{e_i \mid i=1, \dots, n\} \text{ mit}$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} (-1)^j & \text{falls } |i-j| = 1 \text{ und } i+j \equiv 3 \pmod{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere folgt, daß n gerade ist.

3) Die Liealgebra von G

Wir können - auch wenn G keine Liegruppe ist - eine Liealgebra zu G in folgender Weise konstruieren: Sei $\mathcal{L}(G) = V \oplus V_0$ als Vektorraum mit $V_0 \cong \mathbb{R}$. Für $v+v_0$ und $v'+v'_0$ aus $\mathcal{L}(G)$ sei:

$$[v+v_0, v'+v'_0]_{\mathcal{L}} := \langle v, v' \rangle \quad (3)$$

wobei wir $\langle v, v' \rangle$ als Element von V_0 betrachten. Damit ist $\mathcal{L}(G)$ eine extraspezielle Liealgebra mit Zentrum V_0 . Wir schreiben wieder $\bar{x}$ für das Bild von $x \in G$ in V . Seien π_i für $i=0, \dots, n$ Projektionen von $\mathcal{L}(G)$ auf eindimensionale Unterräume, wobei $\pi_i(V) =: V_i$. Da $\mathbb{R}$ projektiv ist in der Klasse der nilpotenten zusammenhängenden Gruppen (siehe (3.6)), gibt es eine Faktorisierung $G = H_n \dots H_1 \cdot Z$ mit Untergruppen $H_i \cong \mathbb{R}$ ($i=1, \dots, n$) (bilde sukzessive semidirekte Produkte!) und $G \approx H_n \times \dots \times Z$. Wir können diese Faktorisierung so einrichten, daß H_i auf V_i abgebildet wird durch die kanonische Projektion $G \rightarrow V$ (für $i=1, \dots, n$). Insbesondere läßt sich jedes $x \in G$ stetig und eindeutig darstellen:

$$(*) \quad x = x_n \dots x_1 \cdot x_0 \quad (x_i \in H_i \text{ für } i = 1, \dots, n; x_0 \in Z)$$

und die Funktion $G \rightarrow Z, x \mapsto x_0$ ist stetig. Da H_i multiplikativ

und V_i additiv geschrieben wird, bezeichnen wir den Isomorphismus $V_i \rightarrow H_i$ mit $\exp$. Bevor auf ganz $\mathcal{L}(G)$ eine Exponentialfunktion definiert wird, führen wir folgende Abkürzung ein ($x, x' \in G$):

$$\mu(x, x') := \mu(\bar{x}, \bar{x}') := \frac{1}{2} \sum_{i < j} \langle \pi_i(\bar{x}), \pi_j(\bar{x}') \rangle \quad (4)$$

Damit ist

$$[x, x'] = \rho \langle \bar{x}, \bar{x}' \rangle = \rho (2(\mu(x, x') - \mu(x', x))) \quad (5)$$

Nun definiere man

$$\begin{aligned} \exp: \mathcal{L}(G) &\longrightarrow G \\ v &\longrightarrow \exp \pi_n(v) \cdot \dots \cdot \exp \pi_1(v) \cdot \rho(\pi_0(v) + \mu(v, v)) \end{aligned} \quad (6)$$

Beachte, daß μ durch (4) eigentlich nur auf V definiert ist, wegen (3) aber sinngemäß auf $\mathcal{L}(G)$ fortgesetzt werden kann.

Die Funktion $\exp$ ist aus stetigen Funktionen zusammengesetzt

(π_i , $\exp$, ρ und dem Produkt in G) also selbst stetig. Multi-

pliziert man für zwei Elemente $v, v' \in \mathcal{L}(G)$ $\exp v$ mit $\exp v'$

und ordnet die Faktoren gemäß der Faktorisierung (*), so ent-

steht der Kommutator $\prod_{i < j} [\exp \pi_i(v), \exp \pi_j(v')] =$

$$\rho \left(\sum_{i < j} \langle \pi_i(v), \pi_j(v') \rangle \right) = \rho (2\mu(v, v')). \text{ Aus (5) leitet man}$$

$$\frac{1}{2} \langle v, v' \rangle + \mu(v+v', v+v') = \mu(v, v) + \mu(v', v') + 2\mu(v, v') \quad (7)$$

ab und mit (6) folgt schließlich die Campbell-Hausdorff-Formel:

$$\exp v \cdot \exp v' = \exp(v+v' + \frac{1}{2} \langle v, v' \rangle) \quad (8)$$

Für die Multiplikation in G (auch für Elemente, die nicht auf einer Einparameteruntergruppe liegen) gilt eine ähnliche

Formel in der *-Darstellung ($x, x' \in G$):

$$x \cdot x' = (x_n \dots x_0) \cdot (x'_n \dots x'_0) = x_n \cdot x'_n \dots x_0 \cdot x'_0 \cdot \prod_{i < j} [x_i, x'_j] \quad (9)$$

wobei

$$\prod_{i < j} [x_i, x'_j] = \rho \sum_{i < j} \langle \pi_i \bar{x}, \pi_j \bar{x}' \rangle = \rho (2\mu(x, x'))$$

Bemerkung:

Eine globale Umkehrung von $\exp$ existiert nur, wenn $Z \cong \mathbb{R}$.

Statt dessen werden wir im nächsten Abschnitt von der Funktion $G \rightarrow \mathcal{L}(G); x \rightarrow \bar{x} - \mu(x, x)$ Gebrauch machen.

Die Konstruktion ist offenbar unabhängig von $\mathbb{R}$; es genügt ein geeigneter Ring R (z.B mit $\frac{1}{2} \in R$), so daß $\frac{G}{Z}$ ein freier R -Modul ist und ein stetiger Homomorphismus von R auf $[G, G]$ existiert.

$$4) \underline{C_{\text{Aut}(G)}(Z) = S_0[\text{Inn}G], \text{ mit } S_0 \cong \text{Sp}(n, \mathbb{R})}$$

Sei $S := \{ \bar{\alpha} \in \text{GL}(V) \mid \langle \bar{\alpha}(v), \bar{\alpha}(w) \rangle = \langle v, w \rangle \text{ für alle } v, w \in V \} \cong \text{Sp}(n, \mathbb{R})$. Der stetige Homomorphismus Ψ aus (1) bildet $C_{\text{Aut}G}(Z)$ in S ab, denn jeder Automorphismus von G respektiert die Kommutatorform. Sei umgekehrt $\bar{\alpha} \in S$ gegeben. Man definiere für $x \in G$ (x in $*$ -Darstellung):

$$\alpha(x) := \exp(\bar{\alpha}\bar{x} - \mu(x, x)) \cdot x_0 \quad (10)$$

Zuerst sieht man, daß α stetig ist. Für $x, x' \in G$ gilt nach (8):

$$\alpha(x) \cdot \alpha(x') = \exp(\bar{\alpha}\bar{x} - \mu(x, x) + \bar{\alpha}\bar{x}' - \mu(x', x') + \frac{1}{2} \langle \bar{x}, \bar{x}' \rangle) \cdot x_0 \cdot x'_0$$

und nach (9):

$$\begin{aligned} \alpha(x \cdot x') &= \exp(\bar{\alpha}(\bar{x} + \bar{x}') - \mu(\bar{x} + \bar{x}', \bar{x} + \bar{x}')) \cdot x_0 \cdot x'_0 \cdot \rho(2\mu(x, x')) \\ &= \exp(\bar{\alpha}\bar{x} + \bar{\alpha}\bar{x}' - \mu(\bar{x} + \bar{x}', \bar{x} + \bar{x}') + 2\mu(x, x')) \cdot x_0 \cdot x'_0 \end{aligned}$$

Nach Definition von S und mit (7) ist aber

$$\frac{1}{2} \langle \bar{x}, \bar{x}' \rangle - \mu(x, x) - \mu(x', x') = 2\mu(x, x') - \mu(\bar{x} + \bar{x}', \bar{x} + \bar{x}')$$

womit die Gleichheit obiger Ausdrücke, also die Homomorphie von α folgt.

Anstatt zu beweisen, daß α bijektiv und offen ist, zeigen wir lieber daß

$$\begin{aligned} \omega: S &\rightarrow \text{Aut} G \\ \bar{\alpha} &\rightarrow \alpha \end{aligned}$$

die durch (10) definierte Abbildung homomorph ist, womit beides automatisch folgt.

Seien $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in S$ und $\alpha, \beta \in \text{Aut} G$ gemäß (10) definiert. Dann gilt für $x \in G$ nach (10) und (6):

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \exp(\pi_n \bar{\alpha}(\bar{x})) \dots \exp(\pi_1 \bar{\alpha}(\bar{x})) \cdot \rho(-\mu(\bar{x}, \bar{x}) + \mu(\bar{\alpha}\bar{x}, \bar{\alpha}\bar{x})) \cdot x_0 \\ \beta(\alpha(x)) &= \exp(\bar{\beta}(\bar{\alpha}(\bar{x})) - \mu(\bar{\alpha}\bar{x}, \bar{\alpha}\bar{x})) \cdot \rho(-\mu(\bar{x}, \bar{x}) + \mu(\bar{\alpha}\bar{x}, \bar{\alpha}\bar{x})) \cdot x_0 \\ &= \exp(\bar{\beta}\bar{\alpha}(\bar{x}) - \mu(\bar{x}, \bar{x})) \cdot x_0 = (\beta\alpha)(x). \end{aligned}$$

Betrachten wir ω : Nach dem eben Gezeigten ist ω homomorph,

bildet S in $C_{\text{Aut} G}(Z)$ ab (siehe (10)), $\Psi \circ \omega = 1_S$ und

$\Psi(C_{\text{Aut} G}(Z)) = S$, insbesondere existiert eine Untergruppe

$S_0 := \omega(S) \leq \text{Aut} G$, die algebraisch isomorph S ist mit

$S_0 \cap \text{Ker } \Psi \cap C_{\text{Aut} G}(Z) = S_0 \cap \text{Inn} G = 1$ und $C_{\text{Aut} G}(Z) = S_0 \cdot \text{Inn} G$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß ω stetig ist:

Sei $V(C, U)$ eine Basisumgebung in $\text{Aut} G$ ($C \subset G$ kompakt,

U offene Einsumgebung in G) und sei C' das Bild von C in V .

Wir wählen $U_1^i \subset \mathcal{L}(G)$ so, daß $\exp(U_1^i + (-U_1^i)) \subset U$ und

$U_2^i \subset U_1^i$ so daß $\langle C', U_2^i \rangle \subset U_1^i$. Außerdem benutzen wir die Formeln

(für x in *-Darstellung).

$$x^{-1} = x_0^{-1} \cdot x_1^{-1} \cdot \dots \cdot x_n^{-1} = x_n^{-1} \cdot \dots \cdot x_0^{-1} \prod_{i < j} [x_i^{-1}, x_j^{-1}]$$

$$\begin{aligned} \exp(-\bar{x} + \mu(x, x)) &= x_n^{-1} \cdot \dots \cdot x_1^{-1} \cdot \rho(2\mu(x, x)) = \\ &= x_n^{-1} \cdot \dots \cdot x_1^{-1} \prod_{i < j} [x_i^{-1}, x_j^{-1}] = x^{-1} \cdot x_0 \end{aligned}$$

Ist $\bar{\alpha} \in V(C', U_2')$, so gilt für alle $x \in C$ und $\alpha = \omega(\bar{\alpha})$:

$$\begin{aligned} x^{-1} \alpha(x) &= \exp(-\bar{x} + \mu(x, x)) \cdot x_0^{-1} \cdot \exp(\bar{\alpha}x - \mu(x, x)) \cdot x_0 \\ &\stackrel{(8)}{=} \exp(-\bar{x} + \mu(x, x) + \bar{\alpha}x - \mu(x, x) + \frac{1}{2} \langle -\bar{x}, \bar{\alpha}x \rangle) \\ &= \exp(-\bar{x} + \bar{\alpha}x + \frac{1}{2} \langle -\bar{x}, -\bar{x} + \bar{\alpha}x \rangle) \\ &\in \exp(U_2' + (-\langle C', U_2' \rangle)) \subset \exp(U_1' + (-U_1')) \subset U. \end{aligned}$$

Analog rechnet man $x^{-1} \cdot \alpha^{-1}(x) \in U$ nach.

Insgesamt haben wir somit eine Untergruppe $S_0 \leq \text{Aut}G$ und einen topologischen Epimorphismus $\omega \circ \Psi|_{C_{\text{Aut}G}(Z)}$ auf S_0 , was eine hinreichende Bedingung für den Zerfall von $C_{\text{Aut}G}(Z)$ über $\text{Ker} \Psi = \text{Inn}G$ ist (vergl. [13; 10.2]).

5) Die Untergruppe $D_0 \cong \text{Aut}Z$ von $\text{Aut}G$

Sei $\lambda \in \text{Aut}Z$ (als reelle Zahl betrachtet) und $\sqrt{|\lambda|}$ die positive Wurzel. Wir wählen eine Faktorisierung (siehe 3)) $G = H_n \dots Z$, so daß $[H_i, H_j] = 1$ außer wenn $|i - j| = 1$ (vergl. die symplektische Basis in 2)). Definiere:

$$\alpha_\lambda : x = x_n \cdot \dots \cdot x_1 \cdot x_0 \rightarrow x_n^{v_n} \dots x_1^{v_1} x_0^\lambda, \text{ wobei } v_i = (\text{sign } \lambda)^i \sqrt{|\lambda|}$$

Damit ist α_λ eine bijektive und stetige Abbildung (beachte: mit λ ist auch $\lambda^{-1} \in \text{Aut}Z$).

$$\alpha_\lambda(x \cdot x') = (x_n \cdot x'_n)^{v_n} \dots (x_0 \cdot x'_0) \cdot \prod_{i < j} [x_i, x'_j]^\lambda$$

$$\alpha_\lambda(x) \cdot \alpha_\lambda(x') = x_n^{v_n} \cdot x'_n^{v_n} \dots (x_0 \cdot x'_0)^\lambda \cdot \prod_{i < j} [x_i^{v_i}, x'_j^{v_j}]$$

Die Gleichheit (und Homomorphie von α_λ) folgt nun aus

$$\begin{aligned} a) [x_i^{v_i}, x'_j^{v_j}] &= \rho \langle v_i \bar{x}_i, v_j \bar{x}'_j \rangle = \rho(v_i \cdot v_j \langle \bar{x}_i, \bar{x}'_j \rangle) = \\ &= [x_i, x'_j]^\lambda \end{aligned}$$

denn $v_i \cdot v_j = \lambda$ falls $|i - j| = 1$, d.h. wenn $v_i \cdot v_j \neq \lambda$

dann ist $[x_i, x'_j] = 1$.

$$b) (x_i \cdot x'_i)^v = x_i^v \cdot x'_i^v, \text{ denn } x_i \in H_i \leq G.$$

Damit ist $\alpha_\lambda \in \text{Aut}G$ für alle $\lambda \in \text{Aut}Z$ und offenbar ist

$$\begin{aligned} \text{Aut}Z &\rightarrow \text{Aut}G \\ \gamma: \lambda &\rightarrow \alpha_\lambda \end{aligned}$$

ein (algebraischer) Monomorphismus. γ ist stetig, denn entweder ist $\text{Aut}Z$ diskret oder G ist einfach zusammenhängende Liegruppe und dann strebt mit $\lambda \rightarrow 1$ auch $v_i \rightarrow 1$ ($i=1, \dots, n$), also $\alpha_\lambda \rightarrow 1$, denn $G \cong H_n \times \dots \times Z$. Die Umkehrung von γ aber ist immer stetig [2; IV 1, Prop. 4], d.h. γ ist ein topologischer Homomorphismus oder eine Einbettung von $\text{Aut}Z$ in $\text{Aut}G$. Sei

$$D_0 := \gamma(\text{Aut}Z).$$

Wenn $\alpha \in \text{Aut}G$ auf Z den Automorphismus λ induziert, so ist $\lambda^{-1} \alpha \in C_{\text{Aut}G}(Z)$. Andererseits ist $D_0 \cap C_{\text{Aut}G}(Z) = 1$. Schließlich sorgt der idempotente topologische Epimorphismus $\text{Aut}G \rightarrow \text{Aut}Z \rightarrow D_0$ mit Kern $C_{\text{Aut}G}(Z)$ dafür, daß

$$\text{Aut}G = D_0 [C_{\text{Aut}G}(Z)]$$

Jetzt können wir das angekündigte Gegenbeispiel angeben, dafür daß $\Psi : \text{Aut}G \rightarrow \text{Aut}V$ i.A. kein topologischer Homomorphismus ist:

Sei $G : \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, z \in K \right\}$, wobei K die Charaktergruppe

von $\mathbb{Q}$ sei. Identifizieren wir $x \cdot y \in \mathbb{R}$ mit $\rho(x \cdot y)$ in K (vergl. 2)), so ist G mit der üblichen Matrizenmultiplikation eine extraspezielle zusammenhängende Gruppe und

$\text{Aut}Z = \text{Aut}K \cong \mathbb{Q}$ mit der diskreten Topologie. Das Bild $\Psi(D_0)$ in $\text{Aut}^G_Z = \text{GL}(2, \mathbb{R})$ aber besteht aus den linearen Abbildungen $\begin{pmatrix} \pm \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda^2 \in \mathbb{Q}$. Als Untergruppe von $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ trägt diese Gruppe die Relativtopologie von $\text{Aut}\mathbb{R}$ und ist nicht diskret.

6) Wirkung von AutG auf InnG

Seien $\alpha \in \text{AutG}$ und $c_g \in \text{InnG}$, dann ist

$$\alpha^{-1} c_g \alpha = c_{\alpha^{-1}(g)} \quad \text{und} \quad [c_g, \alpha] = c_{g^{-1} \cdot \alpha^{-1}(g)} \quad (11)$$

Da in c_g das Element $g \in G$ nur modulo Z eingeht, wirkt

$\alpha \in \text{AutG}$ auf InnG genauso wie $\bar{\alpha} = \Psi(\alpha)$ auf $V \cong \text{InnG}$ (bis auf einen notationsbedingten Antiisomorphismus $\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\alpha}^{-1}$).

Die Topologie als Automorphismengruppe von InnG kann u.U. verschieden der von AutG sein, siehe das obige Gegenbeispiel.

7) Fit(AutG)

Da InnG ein nilpotenter Normalteiler in AutG ist, gilt $\text{InnG} \leq \text{Fit}(\text{AutG})$. $\text{Fit}(\text{AutG}) \cap D_0 = 1$, denn α_λ wirkt sicher nicht nilpotent auf InnG , wenn nicht $\lambda = 1$. Es bleibt $\text{Fit}(\text{AutG}) \cap S_0$ zu untersuchen:

Die Gruppe $\text{Sp}(n, \mathbb{R}) \cong S_0$ ist eine einfache Liegruppe, deren einziger echter und nichttrivialer Normalteiler das Zentrum $\{\pm 1_v\}$ ist (vergl. z.B. Dieudonné [3; II, Th. 1]). Der Automorphismus -1_v aber läßt sich gemäß (10) zu einem Automorphismus i von G fortsetzen, so daß für ein $x \in G$ in $*$ -Darstellung gilt:

$$i(x) = x_n^{-1} \dots x_1^{-1} x_0$$

Aus (11) erkennt man, daß i nicht nilpotent auf InnG wirkt. Also ist $\text{Fit}(\text{AutG}) \cap S_0 = 1$ und $\text{Fit}(\text{AutG}) = \text{InnG}$.

8) $Z(\text{AutG})$ und der größte auflösbare Normalteiler A

Aus 7) folgt $Z(\text{AutG}) \leq \text{InnG}$, aber nach (11) gibt es für alle $c_g \in \text{InnG}$ ein $\alpha \in \text{AutG}$, so daß $[c_g, \alpha] \neq 1$. Somit ist $Z(\text{AutG}) = 1$.

Offensichtlich gilt $\text{InnG} \leq A$ und $D_0 \leq A$, da D_0 abelsch und $D_0 \cdot \text{InnG}$ normal in AutG ist. Nach der Überlegung in 7) ist $A \cap S_0 = \langle i \rangle = \{1, i\}$ und wir stellen fest

$$A = \langle i \rangle \cdot D_0 \cdot \text{InnG} \cong (\mathbb{Z}_2 \oplus \text{AutZ}) [\text{InnG}]$$

Wir fassen zusammen:

Satz 6: Sei G eine extraspezielle, zusammenhängende Gruppe, dann

gilt:

i) $\dim G = n+1$ ungerade

ii) $\text{AutG} = D_0 [C_{\text{AutG}}(Z)]$, $D_0 \cong \text{AutZ}$

iii) $C_{\text{AutG}}(Z) = S_0 [\text{InnG}]$ mit $S_0 \cong \text{Sp}(n, \mathbb{R})$

iv) $\text{InnG} \cong \mathbb{R}^n$

v) $Z(\text{AutG}) = 1$

vi) $\text{Fit}(\text{AutG}) = \text{InnG}$

vii) Der größte auflösbare Normalteiler von AutG ist

$$(D_0 \oplus \langle i \rangle) [\text{InnG}], \text{ mit einer Inversion } i$$

viii) $\text{Fit}(\text{AutG} / \text{InnG}) = \langle i \rangle \oplus D_0 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \text{AutZ}$

§ 6 Folgerungen

Wir wollen hier einige Konsequenzen aus den Sätzen 5 und 6 zusammenstellen. Dabei wird versucht von der algebraischen und topologischen Struktur der Automorphismengruppe auf die Gruppe selbst zu schließen. Sei G stets eine nilpotente, zusammenhängende, lokalkompakte Gruppe, $\text{OutG} := \text{AutG} / \text{InnG}$.

Korollar A: Ist $\dim \text{Fit}(\text{AutG}) < \dim G$, dann ist G abelsch oder extraspeziell.

Korollar B: Ist $\dim \text{Fit}(\text{AutG}) < \dim G - 1$, dann ist G abelsch.

Korollar C: Ist $\dim Z(\text{OutG}) = 0$, dann ist G extraspeziell bzw. abelsch und $Z(G)$ (bzw. G) ist kompakt.

Korollar D: Ist $\text{Fit}(\text{Aut}G)$ lokalkompakt, dann ist

$$\dim Z(G) \leq \dim G < \infty$$

Beweis:

Für nicht-abelsche Gruppen folgt dies aus Satz 5. Falls aber G abelsch ist, also $G = \mathbb{R}^n \oplus K$ mit K kompakt und zusammenhängend nach (3.5), so enthält $\text{Aut}G$ die zu $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, K) \cong \prod_{n \cdot \dim K} \mathbb{R}$ isomorphe Untergruppe $\text{Stab } K$ (siehe (3.8)), die nur dann lokalkompakt ist, wenn $\dim K < \infty$. $\square$

Korollar E: Ist $\text{Fit}(\text{Out}G)$ kompakt, so ist G extraspeziell bzw. abelsch und $Z(G)$ (bzw. G) ist kompakt.

Beweis:

Wie in D) ist nur der abelsche Fall $G = \mathbb{R}^n \oplus K$ zu untersuchen. Wegen $\text{Stab } K \cong \prod_{n \cdot \dim K} \mathbb{R}$ muß $n = 0$ oder $\dim K = 0$ sein. Ist $\dim K = 0$, also $\text{Out}G = \text{Aut}G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$, folgt wieder $n = 0$, denn $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ hat zu $\mathbb{R}$ isomorphes Zentrum falls $n > 0$. $\square$

Kapitel IV

Totalunzusammenhängende Gruppen

Kompakte totalunzusammenhängende Gruppen sind approximierbar durch endliche diskrete Gruppen, d.h. sind projektive Limiten von endlichen Gruppen und wie bei diesen sind die nilpotenten kompakten totalunzusammenhängenden Gruppen direkte Produkte ihrer p -Komponenten, d.h. der Untergruppen, die projektive Limiten von endlichen p -Gruppen sind (vergl. Krull [18]). Da diese p -Komponenten charakteristisch sind, zerfällt auch die Automorphismengruppe in ein direktes Produkt der Automorphismengruppe der p -Komponenten (vergl. Braconnier [2; IV § 1, Th. 1]). Wir können uns also auf eine feste Primzahl p festlegen. Im ersten Paragraphen soll zunächst die Struktur solcher Gruppen so weit nötig beschrieben werden. Dabei werden wir meist auf die Arbeit von Braconnier [2] verweisen.

§ 1 Struktur und elementare Eigenschaften von pro- p -Gruppen

Definition: Sei p eine Primzahl. Unter einer pro- p -Gruppe versteht man eine separable, topologische Gruppe G mit der Eigenschaft, daß sich der Homomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow G; n \rightarrow x^n$ für alle $x \in G$ bzgl. der p -adischen Topologie auf $\mathbb{Z}$ stetig fortsetzen läßt auf die additive Gruppe J_p der p -adischen Zahlen Δ_p .

Der Zusammenhang mit obiger Einleitung ist ersichtlich aus

Lemma (4.1) (Braconnier [2; II § 2, Prop. 1]):

Kompakte pro- p -Gruppen sind projektiver Limes von endlichen p -Gruppen.

Eine ähnliche Charakterisierung ist für abelsche lokalkompakte pro- p -Gruppen möglich.

Lemma (4.2) (Braconnier [2 ; II § 2 Cor. 2]):

Lokalkompakte abelsche pro-p-Gruppen sind projektiver
Limes diskreter p-Gruppen.

Insbesondere sind diese Gruppen vollständig und eine Umgebungsbasis der 0 wird gebildet von offenen kompakten Untergruppen. Für kompakte und nicht-abelsche Gruppen nehme man offene kompakte Normalteiler.

Abelsche, torsionsfreie, kompakte pro-p-Gruppen (wir schreiben kurz ATK-p-Gruppe) besitzen eine besonders einfache Gestalt.

Lemma (4.3) (Braconnier [2 ; II § 5; Th. 2]):

Ist G ATK-p-Gruppe, dann gilt $G \cong \prod_{\mathfrak{M}} J_p$ mit einer
höchstens abzählbaren Kardinalzahl $\mathfrak{M}$.

Die Kardinalzahl $\mathfrak{M}$ ist eine gruppentheoretische Invariante, d.h. zwei ATK-p-Gruppen sind genau dann isomorph, wenn diese Zahlen übereinstimmen (Braconnier [2 ; II § 5 Prop. 4]). Die Einschränkung auf höchstens abzählbare Kardinalzahl folgt aus der Separabilität von G.

In diesem Kapitel müssen wir auf dem kartesischen Produkt einer Familie $\{A_i \mid i \in I\}$ von Gruppen verschiedene Topologien betrachten.

Wir schreiben wie bisher $\prod_{i \in I} A_i$ für das mit der Produkttopologie versehene Produkt und $\bigoplus_{i \in I} A_i$ für die direkte Summe mit der Relativtopologie von $\prod_{i \in I} A_i$. Cr A_i (bzw. Dr A_i) seien die abstrakten Gruppen ohne Topologie. Sind alle $A_i \cong J_p$, so definiert

$\{U_n := \prod_{i \in I} p^n A_i = \prod_{i \in I} p^n J_p \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis der 0. Wir

bezeichnen Cr A_i mit dieser p-adischen Topologie $\prod_{i \in I}^p A_i$ und

Dr A_i mit $\bigoplus_{i \in I}^p A_i$. Man beachte, daß beide Topologien Cr A_i und

Dr A_i zu pro-p-Gruppen machen und genau dann übereinstimmen, wenn die Produkte endlich sind.

Abelsche lokalkompakte pro-p-Gruppen sind topologische Δ_p -Module, d.h. die Abbildung $\mathbb{Z} \times G \rightarrow G; (n, g) \rightarrow g^n$ läßt sich bzgl. der p-adischen Topologie auf $\mathbb{Z}$ und der Topologie von G stetig (in beiden Komponenten) fortsetzen [2 ; II § 2, Prop. 4].

Die Klasse der pro-p-Gruppen ist abgeschlossen gegen Bildung von Faktorgruppen, direkten Produkten, direkten Summen und abgeschlossenen Untergruppen [2 ; II § 1].

Für abelsche pro-p-Gruppen definieren wir einen (torsionsfreien) Rang:

Definition: Sei G eine abelsche pro-p-Gruppe. Dann sei $r(G)$ die größte Zahl $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, für welche eine Familie von über Δ_p linear unabhängigen Elementen existiert. Gibt es keine solche Zahl, so ist $r(G) := \infty$.

Bemerkung: In obiger Definition betrachten wir $\mathbb{N}$ als Vertreter aller unendlichen Kardinalzahlen. Gelegentlich schreiben wir statt $r(G) = \mathbb{N}$ auch $r(G) = \infty$. Der Zweck dieser Notation ist aus dem nächsten Lemma ersichtlich.

Dieser Rang ist additiv, scheint aber auf den ersten Blick die Gruppen von unendlichem Rang nur ungenügend zu beschreiben. In der Tat haben $\bigoplus_{\mathbb{N}} J_p, \bigoplus_{\mathbb{N}}^p J_p, \prod_{\mathbb{N}} J_p$ und $\prod_{\mathbb{N}}^p J_p$ alle denselben Rang. Es gilt allerdings:

Lemma (4.4): Ist G eine abelsche, lokalkompakte pro- p -Gruppe, dann hat G eine zu $\prod_{r(G)} J_p$ isomorphe Untergruppe.

Beweis:

Sei U eine offene, kompakte Untergruppe von G und $\{a_i \mid i \in r(G)\} = \Gamma$ ein System linear unabhängiger Elemente aus G . Ist für ein $i \in r(G)$ und ein $\lambda \in \Delta_p$ $\lambda \cdot a_i \in U$, so ersetze a_i durch $\lambda \cdot a_i$ und Γ ist immer noch linear unabhängig. Falls aber $\Delta_p \cdot a_i \cap U = 0$ ist, dann enthält G/U eine zu J_p isomorphe Untergruppe im Widerspruch zur Offenheit von U . Wir nehmen also an $\Gamma \subset U$.

Die Charaktergruppe von U - eine diskrete p -Gruppe - läßt sich in eine divisible Gruppe $\hat{D} = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p^\infty$ einbetten. Die Charaktergruppe von $\hat{D}$ aber - nämlich D - ist isomorph $\prod_{\mathbb{N}} J_p$. Das bedeutet, es existiert ein stetiger surjektiver Homomorphismus φ von D auf U (für Einzelheiten der Charaktertheorie von pro- p -Gruppen siehe [2]).

Man wähle für alle $i \in r(G)$ ein Urbild b_i von a_i in D und sieht, daß auch $\{b_i \mid i \in r(G)\}$ ein linear unabhängiges System in D ist.

Sei B die davon erzeugte abgeschlossene Untergruppe, die als ATK- p -Gruppe isomorph $\prod_{r(G)} J_p$ ist. Sei weiter $B_0 = \bigoplus_{i \in r(G)} \Delta_p \cdot b_i$ die zu $\bigoplus_{r(G)} J_p$ isomorphe dichte Untergruppe von B . Schränkt man

$\varphi : D \rightarrow U$ auf B_0 ein, so erhält man einen (algebraischen) stetigen Isomorphismus von B_0 auf $A := \{ \sum_{i \in J} \lambda_i a_i \mid J \text{ endliche Teilmenge von } r(G), \lambda_i \in \Delta_p \}$. Da sowohl B als auch der Abschluß von A kompakt und vollständig sind, ist $\varphi|_B$ ein topologischer Monomorphismus, d.h. G enthält eine zu $\prod_{r(G)} J_p$ isomorphe Untergruppe $\varphi(B)$. $\square$

§ 2 Homomorphismen abelscher, torsionsfreier,
kompakter Gruppen

Definition: $H_n := \prod_n J_p$ für $n < \infty$ und

$H_\infty := \{(a_1, \dots, a_n, \dots) \mid (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Nullfolge in } J_p\} \leq \prod_{\mathbb{N}} J_p$,
d.h. H_∞ sei versehen mit der Relativtopologie der
p-adischen Topologie.

H_∞ ist die Vervollständigung von $\bigoplus_{\mathbb{N}} J_p$ bzgl. der p-adischen
Topologie und trägt selbst die p-adische Topologie, denn wenn
 $(p^k a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist ($k \in \mathbb{N}$), so auch $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, d.h.
 $p^k \cdot \prod_{J_p} \cap H_\infty = p^k \cdot H_\infty$.

Lemma (4.5): Seien A und B abelsche, torsionsfreie, kompakte
pro-p-Gruppen

- i) $\text{Hom}(A, J_p) \cong H_{r(A)}$
- ii) $\text{Hom}(A, B) \cong \prod_{r(B)} \text{Hom}(A, J_p) = \prod_{r(B)} H_{r(A)}$

Beweis:

i) Da nach (4.3) $A \cong \prod_{r(A)} J_p$ und $\text{Hom}(J_p, J_p) \cong J_p$ (siehe [4; 43
Ex. 5]) ist die Behauptung für $r(A) < \infty$ bekannt (vergl. [10 ;
23.34(c)]). Sei also $r(A) = \infty$. Man wähle $\{e_i = (0, \dots, 1, \dots) \mid i \in \mathbb{N}\}$
als Basis der zu $\bigoplus_{\mathbb{N}} J_p$ isomorphen Untergruppe A_1 von A. Be-
kanntlich ist dann (algebraisch)

$$\text{Hom}(A_1, J_p) \cong \text{Cr}_{\mathbb{N}} \text{Hom}(J_p, J_p) \cong \text{Cr}_{\mathbb{N}} J_p.$$

A_1 aber liegt dicht in A und stetige Homomorphismen sind auch
gleichmäßig stetig. Da zudem J_p vollständig ist, lassen sich
alle stetigen Homomorphismen von A_1 nach J_p auf A fortsetzen.
Sei α ein (algebraischer) Homomorphismus von A_1 in J_p . Wir
zeigen: Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die
Stetigkeit von α ist, daß $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} := (\alpha(e_i))_{i \in \mathbb{N}}$ Nullfolge in
 J_p ist:

a) Notwendigkeit: Sei $a = (a_1, \dots, a_i, \dots) \in A$ und

$a^{(n)} := (a_1, \dots, a_n, 0, \dots) \in A_1$. Aus der Stetigkeit von α

folgt die Existenz von

$$\alpha(a) = \alpha(\lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$$

Setzt man $a_i = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann ist ersichtlich, daß

$(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

b) Hinreichend: Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben und $\alpha_i \in p^n \cdot J_p$ für große i , sagen wir $i \geq k(n)$. Betrachte $\alpha^{-1}(p^n \cdot J_p)$: Sei

$U := \bigcup_{i \leq k(n)} p^n J_p \times \bigcup_{i > k(n)} J_p$ eine offene Menge in A und

$a = (a_1, \dots, a_m, 0, \dots) \in A_1 \cap U$, dann teilt p^n alle a_i mit $i \leq k(n)$ und alle α_i für $i > k(n)$, also:

$$\alpha(a) = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \in p^n J_p$$

denn p^n teilt jeden Summanden. Somit ist α stetig.

Gezeigt ist also, daß die stetigen Homomorphismen von A nach J_p genau den Nullfolgen in J_p entsprechen. Um schließlich die Topologie auf dieser Gruppe zu beschreiben, fassen wir sie als Untergruppe des kartesischen Produktes von abzählbar vielen

J_p 's auf. Wir schreiben $\alpha \in \text{Hom}(A, J_p)$ als Summe

$\alpha(a_1, \dots, a_i, \dots) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i a_i$ in der Gewissheit, daß diese Summe

konvergiert. Da $p^n J_p$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Ideal im Ring Δ_p ist,

ist $\sum_{i=1}^N \alpha_i a_i \in p^n J_p$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und $(a_1, \dots, a_i, \dots) \in A$

äquivalent zu $\alpha_i \in p^n J_p$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Deshalb ist

$$\begin{aligned} W(A, p^n J_p) &= \{ \alpha \in \text{Hom}(A, J_p) \mid \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i \in p^n J_p \} = \\ &= \{ \alpha \in \text{Hom}(A, J_p) \mid \alpha_i \in p^n J_p \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \} \\ &= \bigcap_{i \in \mathbb{N}} p^n J_p \cap H_{\infty} = p^n H_{\infty} \end{aligned}$$

womit (i) bewiesen ist.

ii) Es gilt auch $B \cong \prod_{r(B)} J_p$. Sei p_i die Projektion auf die i -te Komponente; $i \in r(B)$. Der algebraische Teil der Behauptung ist aus der Theorie der abelschen Gruppen bekannt (vergl. [4; 43.2]), wobei der Isomorphismus gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \Psi: \quad \text{Hom}(A, B) &\longrightarrow \prod_{r(B)} \text{Hom}(A, J_p) \\ \varphi &\longrightarrow (p_i \circ \varphi)_{i \in r(B)} \end{aligned}$$

Nun ist für eine Nullumgebung U in B

$$\Psi(W(A, U)) = (p_i(W(A, U)))_{i \in r(B)} = (W(A, p_i(U)))_{i \in r(B)}$$

Man bedenke, daß fast alle $p_i(U)$ gleich J_p sind, also $(W(A, p_i(U)))$ gleich $\text{Hom}(A, J_p)$ für fast alle $i \in r(B)$. Die Mengen $\Psi(W(A, U))$ bilden also eine Basis der Nullumgebungen in $\text{Im } \Psi$ wenn U die offenen Nullumgebungen von B durchläuft. Dies zeigt, daß Ψ ein Homöomorphismus ist. $\square$

Das nächste Lemma soll die topologische Struktur von H_∞ klären.

Lemma (4.6): Eine abgeschlossene Untergruppe C von H_∞ ist genau dann lokalkompakt, wenn eine Folge natürlicher Zahlen $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ existiert mit $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$ und für alle $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in C$ gilt $a_i \in p^{n_i} J_p$.

Beweis:

Falls $r(C) < \infty$ ist die Behauptung trivial, sei also $r(C) = \infty$ und C lokalkompakt. Dann besitzt C eine offene, kompakte Untergruppe C_0 , die wegen der Torsionsfreiheit isomorph $\prod_{\mathbb{N}} J_p$ ist. Für eine offene Untergruppe $U = p^k H_\infty$ von H_∞ ($k \in \mathbb{N}$) ist $U \cap C_0$ offen in C_0 in der Produkttopologie. Deshalb liegen fast alle Komponenten von C_0 in U , d.h. für $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in C_0$ ist $a_i \in p^k J_p$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$. Die Folge $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ $n_i := \sup \{m_i \mid a_i \in p^{m_i} J_p\}$

für alle $a = (a_1, \dots, a_i, \dots) \in C_0$ strebt also gegen unendlich.

Die Gruppe $\frac{C}{C_0}$ ist diskret, hat also für genügend große n trivialen Schnittpunkt mit $(p^n H_\infty + C_0)/C_0$ oder $p^n H_\infty \cap C \subset C_0$, insbesondere $p^n C \subset C_0$. Ersetzt man in obiger Folge n_i durch $\max\{n_i - n, 0\}$, so erhält man die gewünschte Folge, die immer noch Limes ∞ hat.

Ist umgekehrt eine Folge $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$ gegeben, so

definiert

$$\begin{aligned} \prod_{i \in \mathbb{N}} J_{p^{n_i}} &\longrightarrow H_\infty \\ \varphi: (a_i)_{i \in \mathbb{N}} &\longrightarrow (p^{n_i} \cdot a_i)_{i \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

einen stetigen injektiven Homomorphismus. Als abgeschlossene Untergruppe von $\text{Im } \varphi$ ist C dann kompakt. $\square$

Man bemerke, daß wir insbesondere bewiesen haben, daß jede lokalkompakte Untergruppe von H_∞ kompakt ist.

Zu jeder gegen unendlich strebenden Folge $\tilde{F}_j := (n_i^{(j)})_{i \in \mathbb{N}}$ existiert also eine kompakte Untergruppe C_j von H_∞ . Ist $\tilde{F}_j$ konstruiert, so wähle eine Teilfolge $(n_{i_k}^{(j)})_{k \in \mathbb{N}}$ so daß $n_{i_k}^{(j)} \geq 2k - 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und definiere

$$n_i^{(j+1)} := \begin{cases} n_{i_k}^{(j)} - k & \text{für } i = i_k \\ n_i^{(j)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i^{(j+1)} = \infty$ und die zu $\tilde{F}_{j+1}$ gehörige Untergruppe C_{j+1} ist kompakt. Andererseits zeigt man durch Induktion nach i , daß $\lim_{j \rightarrow \infty} n_i^{(j)} = 0$ ist, was aber heißt, daß jedes Element von H_∞ in einer solchen Gruppe C_j liegt und $H_\infty = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_j$.

Betrachtet man $\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$ für $j > 0$, dann sieht man, daß diese Gruppe isomorph $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_p^k$ ist mit der von H_{∞} geerbten Topologie. $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_p^k$ aber enthält $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} J_p$ (Fuchs [4 ; 40 Ex.2]) hat also Rang ∞ .

Für jede kompakte Untergruppe C von H_{∞} hat also H_{∞}/C eine zu $\prod_{i \in \mathbb{N}} J_p$ isomorphe Untergruppe.

Zum Abschluß dieses Paragraphen fassen wir unsere Erkenntnisse zusammen:

Satz 7: Seien A und B abelsche, torsionsfreie kompakte pro- p -Gruppen, dann gilt:

- i) $\text{Hom}(A, B)$ ist lokalkompakt genau dann, wenn $r(A) < \infty$
- ii) Ist $r(A) < \infty$, so ist $\text{Hom}(A, B) \cong \prod_{r(A) \cdot r(B)} J_p$
- iii) $\text{Hom}(A, B)$ ist σ -kompakt
- iv) Eine lokalkompakte Untergruppe von $\text{Hom}(A, B)$ ist kompakt.
- v) Falls $r(A) = \infty$, $C \leq \text{Hom}(A, B)$ und C lokalkompakt, so besitzt $\text{Hom}(A, B)/C$ zu $\prod_{i \in \mathbb{N}} J_p$ isomorphe Untergruppen, hat also insbesondere unendlichen Rang.

Der Beweis folgt direkt aus den Lemmata (4.5) und (4.6). Zu bemerken ist lediglich, daß eine Untergruppe von $\text{Hom}(A, B) \cong \prod_{r(B)} \text{Hom}(A, J_p)$ genau dann lokalkompakt (kompakt) ist, wenn die Projektion auf jede Komponente lokalkompakt (kompakt) ist. Deshalb genügt es die Behauptungen für $B = J_p$ nachzuprüfen.

Gegenbeispiel:

Die Voraussetzung A torsionsfrei ist notwendig, denn für $A = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$ ist $r(A) = \infty$ aber $\text{Hom}(\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^i}, J_p) = 0$, da die Torsionsuntergruppe von A dicht liegt und im Kern jedes Homomorphismus.

Korollar 7a): Ist G eine kompakte pro- p -Gruppe mit $r(Z(G)) \geq 1$ und einem abgeschlossenem Normalteiler N , der G' und $Z(G)$ enthält, wobei G/N torsionsfrei von unendlichem Rang ist. Dann existiert ein Normalteiler X in $\text{Aut } G$ mit $\prod_N J_p \cong Y \leq X/\text{Inn } G$. Ist G nilpotent, so auch X .

Beweis:

$\text{Stab } Z(G) \cap \text{Stab } N \cong \text{Hom}(G/N, Z(G)) \geq \text{Hom}(G/N, J_F) \cong H_\infty$. Sei X_1 die zu H_∞ isomorphe Untergruppe von $\text{Stab } Z(G) \cap \text{Stab } N$. Dann ist - da $\text{Inn } G$ als stetiges Bild von G kompakt ist - $X_1 \cap \text{Inn } G$ eine kompakte Untergruppe von X_1 , also besitzt nach Satz 7

$X_1 / (X_1 \cap \text{Inn } G)$ eine ATK- p -Gruppe Y_1 mit Rang unendlich. Da

für kompakte Gruppen die Isomorphiesätze uneingeschränkt gelten, ist $Y_1 \cong Y \leq X_1 \cdot \text{Inn } G / \text{Inn } G$ und $X := \text{Stab } Z(G) \cdot \text{Inn } G$

ist nach (1.2) bzw. (1.4) der passende Normalteiler von $\text{Aut } G$. $\square$

§ 3 Automorphismen kompakter pro-p-Gruppen

Wie man im Korollar 7a gesehen hat, müssen wir um die Technik von (1.2) anwenden zu können, für Normalteiler $N \leq G$ sorgen, so daß G/N eine ATK-p-Gruppe ist:

Lemma (4.7): Sei G eine nilpotente - aber nicht abelsche - torsionsfreie kompakte pro-p-Gruppe und A ein abgeschlossener abelscher Normalteiler mit $Z(G) < A$, dann existiert ein Normalteiler N in G mit

$$M := C_G(A) \leq N \leq G \text{ und } G/N \cong J_p.$$

Beweis:

Sei $G = G^C \geq G^{C-1} \dots G^0 = 1$ eine Zentralreihe mit abgeschlossenen Normalteilern G^i und setze $A_i := A \cap G^i$, $M_i := C_G(A_i)$ (beides abgeschlossene Normalteiler). Definiere:

$$\begin{aligned} \psi: \quad M_i / M_{i+1} &\longrightarrow \text{Hom}(A_{i+1} / A_i, A_i) =: F_i \\ g M_{i+1} &\longrightarrow (\varphi : a A_i \rightarrow [a, g]) \end{aligned}$$

- 1) φ ist wohldefiniert, da $g \in M_i = C_G(A_i)$ und ein Homomorphismus in A_i , da A_i abelsch ist und $[A_{i+1}, M_i] \leq [A_{i+1}, G] \leq A_i$
- 2) ψ ist homomorph, da $[[A_{i+1}, M_i] M_i] \leq [A_i, M_i] = 1$ und für $g_1, g_2 \in M_i$, $a \in A$ gilt:
 $[a, g_1 g_2] = [a, g_1] [a, g_2]^{g_1} = [a, g_1] [a, g_2]$
- 3) ψ ist injektiv und wohldefiniert, denn φ ist genau dann 0, wenn $g \in C_G(A_{i+1}) = M_{i+1}$.
- 4) Die Stetigkeit von ψ und φ folgt aus der von $G \times A_{i+1} \rightarrow A_i; (g, a) \rightarrow [g, a]$ und der Offenheit der Quotientenabbildungen $M_i \rightarrow M_i / M_{i+1}$ bzw. $A_{i+1} \rightarrow A_{i+1} / A_i$.

Wir haben also M_i / M_{i+1} stetig in F_i eingebettet, und F_i ist eine torsionsfreie abelsche Gruppe, weshalb M_i / M_{i+1} ATK-p-Gruppe ist. Da $A \not\leq Z(G)$ existiert ein minimales i , so daß $M_i \neq G$. Dann

ist G/M_1 ATK-p-Gruppe, also direktes Produkt von J_p 's. Es läßt sich ein $N \leq G$ finden mit $G/N \cong J_p$ und $M_C = C_G(A) \leq M_1 \leq N$, womit das Lemma bewiesen ist. $\square$

Betrachten wir in der nilpotenten pro-p-Gruppe einen Normalteiler N wie in (4.7) mit $G/N \cong J_p$, dann ist $B := Z(N)$ ein abelscher Normalteiler in G auf dem $Q := G/N$ durch die Konjugation in G wirkt, also B ist ein Q -Modul.

Beachte aber, daß diese Q -Modulstruktur verschieden von der Δ_p -Modulstruktur ist; Durch Q wirkt die additive Gruppe J_p von Δ_p auf B , während in der Δ_p -Modulstruktur der Ring Δ_p wirkt.

Definition: Eine torsionsfreie, kompakte pro-p-Gruppe heiße extraspeziell, wenn $G' \leq Z(G)$, $r(Z(G)) = 1$ und $r(G/Z(G)) < \infty$.

Satz 8: Sei G eine nilpotente, torsionsfreie, kompakte pro-p-Gruppe, die weder abelsch noch extraspeziell ist. Dann gibt es einen nilpotenten, abgeschlossenen Normalteiler X von $\text{Aut}G$, so daß X eine zu $Z(G)$ isomorphe Untergruppe Y besitzt mit $Y \cap \text{Inn}G = 1$.

Beweis:

a) Annahme: Jede charakteristische abelsche Untergruppe liege im Zentrum $Z := Z(G)$. Nach (1.5) ist $G' \leq Z$ und mit (1.2) existiert ein abelscher Normalteiler $X := \text{Stab } Z$ von $\text{Aut}G$,
 $X \cong \text{Hom}(G/Z, Z)$.

Für $x, g \in G$ ist $[g, x] \in Z$ und deshalb $[g^n, x] = [g, x]^n$. Mit $g^n \in Z$ folgt also auch $g \in Z$, da G torsionsfrei ist, d.h.

G/Z und Z sind ATK-p-Gruppen.

Wegen 7a können wir annehmen, daß $r(G/Z) < \infty$. Um auch $r(G/Z) = 1$ auszuschließen, zeigen wir daß J_p projektiv ist in der Klasse der pro-p-Gruppen:

Wenn $G/Z \cong J_p$, so besitzt diese Gruppe eine dichte, zu Z isomorphe Untergruppe C , die in der Kategorie der diskreten Gruppen frei ist. Es gibt also einen algebraischen Isomorphismus von C auf eine Untergruppe C_1 von G , dessen Inverses die kanonische Projektion ist. Nach Definition einer pro-p-Gruppe aber läßt sich dieser Homomorphismus von C nach G fortsetzen zu einem stetigen Homomorphismus von $G/Z \cong J_p$ nach G . Dies ist eine hinreichende Bedingung für den Zerfall von G . In unserem Fall ($Z = Z(G)$) ist G damit abelsch im Widerspruch zur Voraussetzung.

Sei also $1 < r(G/Z) < \infty$ und $r(Z) > 1$, denn $r(Z) = 1$ würde extra-spezziell bedeuten. Dann ist $r(G/Z) \cdot r(Z) \geq r(G/Z) + r(Z)$ und $r(G/Z) \cdot r(Z) - r(G/Z) \geq r(Z)$. Da X nach (4,5) den Rang $r(G/Z) \cdot r(Z)$ hat und die in X enthaltene kompakte Untergruppe $\text{Inn}G$ den Rang $r(G/Z)$ folgt $r(X/\text{Inn}G) \geq r(Z)$, d.h. $X/\text{Inn}G$ enthält eine zu Z isomorphe Untergruppe $Y/\text{Inn}G = \prod_{r(Z)} J_p$. Da J_p projektiv ist, ist $\prod J_p$ projektiv in der Klasse der abelschen pro-p-Gruppen und X besitzt eine Untergruppe

$$Y = \prod_{r(Z)} J_p \cong Z \text{ mit } Y \cap \text{Inn}G = 1$$

b) Man kann also annehmen, daß eine charakteristische Untergruppe A existiert mit $Z < A$. Dieses A kann wegen des Zorn'schen Lemmas maximal gewählt werden, denn die Vereinigung jeder Kette $A_1 \leq \dots A_i \dots$ von charakteristischen abelschen Untergruppen ist wieder eine solche. Insbesondere ist A abgeschlossen.

Sei $M := C_G(A)$, dann ist $A = Z(M)$, denn sicher ist $A \leq Z(M)$ und wegen der Maximalität von A besteht Gleichheit (Beachte, daß mit A auch M charakteristisch ist). Mit (1.2) folgt

$$\text{Der}(\frac{G}{M}, A) \cong \text{Stab } A \cap \text{Stab } M =: Y_1 \leq \text{Aut } G$$

und mit (1.4)

$$X := \text{Inn } G \cdot Y_1 \text{ ist nilpotent.}$$

Da $\text{Inn } G$ kompakt ist und Y_1 abgeschlossen, ist auch X abgeschlossen.

Nach (4.7) existiert $N \trianglelefteq G$ mit $M \leq N$ und $\frac{G}{N} \cong J_p$. Da J_p projektiv in der Klasse der pro- p -Gruppen (siehe a)) ist, folgt $G = Q[N]$ mit $Q \cong \frac{G}{N}$. Sei $B := Z(N)$

1. Fall: $B = Z$. Setze $Y := \text{Stab } Z \cap \text{Stab } N \cong \text{Hom}(Q, Z) \cong \prod_{r(Z)} J_p \cong Z$ nach (1.2) und (4,5). Für $c_g \in \text{Inn } G \cap \text{Stab } N$ ist $g \in C_G(N) = B = Z$, also $c_g = 1$ und $\text{Inn } G \cap Y = 1$. Da $B \leq A$, $M \leq N$ ist $Y \leq Y_1 \leq X$. Y leistet das Verlangte.

2. Fall: $B > Z$. Dann existiert nach (4.7) ein $N_1 \trianglelefteq G$ mit

$\frac{G}{N_1} \cong J_p$ und $N \leq C_B(G) \leq N_1 \leq G$. Da J_p keine zu sich selbst isomorphen Faktorgruppen besitzt, ist $N = N_1 = C_B(G)$. Nun läßt sich (1.2) anwenden für $Y_2 = \text{Stab } N \cap \text{Stab } B \leq Y_1$:

$$Y_2 \cong \text{Der}(Q, B), Y_2 \cap \text{Inn } G \cong \text{Ider}(Q, B). \quad (1)$$

Wenn wir zeigen, daß $H^1(Q, B)$ eine kompakte pro- p -Gruppe ist und $r(H^1(Q, B)) \geq r(Z)$, dann hat die abelsche Gruppe $\text{Der}(Q, B)$ (wie unter a)) eine Untergruppe $D \cong Z$ mit $D \cap \text{Ider}(Q, B) = 0$. Sei Y die gemäß (1) zu D isomorphe Untergruppe von Y_2 . Dann erfüllt Y alle Bedingungen des Satzes.

Wir bezeichnen mit q einen Erzeuger der Gruppe Q (z.B. das Bild von 1 unter $J_p \rightarrow Q$).

Behauptung: i) $\text{Der}(Q, B) \cong B$

$$\text{ii) } \text{Ider}(Q, B) \cong [B, q]$$

$$\text{iii) } r(H^1(Q, B)) = r(Z(G))$$

Beweis:

i) Wir schreiben B additiv. Man erinnere sich, daß nach Definition der pro- p -Gruppe $\Delta_p \rightarrow G$, $\lambda \mapsto x^\lambda$ für alle $x \in G$ stetig ist, wobei das Potenzieren mit $\lambda \in \Delta_p$ sinngemäß als Grenzwert zu verstehen ist. Für $b \in B$ definiere

$$\varphi_b: \begin{array}{l} Q \longrightarrow Q[B] \\ q^\lambda \longmapsto (q, b)^\lambda \end{array}$$

Mit diesem stetigem Homomorphismus ist eine stetige Derivation d_b definiert durch

$$\varphi_b(q^\lambda) = (q^\lambda, d_b(q^\lambda))$$

Für natürliche Zahlen $\lambda \in \mathbb{N}$ läßt sich d_b explizit angeben:

$$d_b(q^\lambda) = b^{q^{\lambda-1}} + b^{q^{\lambda-2}} + \dots + b \quad (2)$$

Sei U eine Q -invariante abgeschlossene Untergruppe in B , dann folgt aus (2), da $\mathbb{N}$ dicht liegt in Δ_p

$$b = d_b(q) \in U \text{ genau dann, wenn } d_b(Q) \subset U \quad (3)$$

Sei $\Psi: B \rightarrow \text{Der}(Q, B)$; $b \mapsto d_b$, dann ist Ψ algebraisch ein Isomorphismus. Die Topologie in G wird durch offene Normalteiler erzeugt, die Relativtopologie von B also durch offene Q -invariante Untergruppen. Ist U eine solche, dann ist wegen (3) $d_b \in W(Q, U)$ genau dann, wenn $b \in U$, weshalb Ψ ein topologischer Isomorphismus ist.

ii) Wenn nun $d \in \text{Ider}(Q, B)$ ist, so ist $\Psi^{-1}(d) = d(q) = (-1+c_q)b$ für ein $b \in B$, also $\Psi^{-1}(\text{Ider}(Q, B)) \subset (-1+c_q)B = [B, q]$. Umgekehrt ist für $b' \in [B, q]$ $b' = [b, q] = (-1+c_q)b$ und $\Psi(b') \in \text{Ider}(Q, B)$. Somit ist (ii) gezeigt.

iii) Der Homomorphismus $-1+c_q : B \rightarrow [B, q]$ ist stetig auf $[B, q]$, hat Kern $Z = \{b \in B \mid c_g(b) = b \text{ für alle } g \in G\} = \{b \in B \mid c_q(b) = b\}$ und da B kompakt ist, gilt

$$\frac{B}{Z} \cong [B, q]$$

Falls $r(B) < \infty$ ist also $r(Z) = r(B) - r(\frac{B}{Z}) = r(\frac{B}{[B, q]})$ und wegen (i) und (ii) ist $H^1(Q, B) \cong \frac{B}{[B, q]}$, was auch (iii) beweist.

Wir wollen dies auch für $r(Z) = \infty$ zeigen:

Da G nilpotent ist, wirkt $\varphi := -1+c_q$ nilpotent auf B . Sei n die kleinste Zahl mit $\varphi^n = 0$. Definiere:

$$B_i := \text{Im } \varphi^i, \quad B^i := \text{Ker } \varphi^i \quad (i = 0, \dots, n)$$

φ induziert einen stetigen Epimorphismus $\frac{B_i}{B_{i+1}} \rightarrow \frac{B_{i+1}}{B_{i+2}}$ ($0 \leq i \leq n-2$). Deshalb ist $r(\frac{B_{i+1}}{B_{i+2}}) \leq r(\frac{B_i}{B_{i+1}}) \leq r(\frac{B}{B_1})$.

Wegen der Additivität von r folgt

$$r(B) = r(\frac{B}{B_1}) + \dots + r(\frac{B_{n-1}}{B_n}) \leq n \cdot r(\frac{B}{B_1}) = r(\frac{B}{B_1}) \quad (4)$$

wobei die letzte Gleichheit aus $r(B) = \infty$ folgt.

φ induziert auch stetige Monomorphismen $\frac{B^i}{B^{i-1}} \rightarrow \frac{B^{i-1}}{B^{i-2}}$ ($2 \leq i \leq n$). Somit $r(\frac{B^i}{B^{i-1}}) \leq r(\frac{B^1}{B^0}) = r(\text{Ker } \varphi)$ und

$$r(B) = r(\frac{B}{B^{n-1}}) + \dots + r(B_1) \leq n \cdot r(B_1) = r(\text{Ker } \varphi) \quad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt schließlich

$$r(Z) = r(\text{Ker } \varphi) = r(B) = r(\frac{B}{[B, q]}) = r(H^1(Q, B))$$

Damit ist (iii) gezeigt, was auch den Beweis von Satz 8 schließt. $\square$

§ 4 Extraspezielle kompakte Gruppen

Im Folgenden sei G eine torsionsfreie, kompakte pro- p -Gruppe, $G' \leq Z(G) = Z$, $r(\frac{G}{Z}) < \infty$ und $r(Z) = 1$. Argumente, die in ähnlicher Form in III § 5 auftauchten, werden hier nur kurz behandelt.

1) Struktur:

Als ATK- p -Gruppen sind sowohl $V := \frac{G}{Z} \cong \prod_n J_p$ (für ein $n \in \mathbb{N}$), als auch $Z \cong J_p$. Es gilt: $\text{Aut} Z \cong Z_{p-1} \rtimes J_p$, der Einheitengruppe des Ringes Δ_p (vergl. Fuchs [4; 127.5]). $\text{Aut} V = \text{GL}(n, \Delta_p)$. Wir schreiben G additiv und bezeichnen die kanonische Projektion $G \rightarrow V$ mit π ; $\pi(x) =: \bar{x}$.

2) Kommutatorform:

$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) := [x, y]$ definiert für $x, y \in G$ eine antisymmetrische, nicht-ausgeartete, stetige Bilinearform auf V ("linear" heißt verträglich mit der Δ_p -Modulwirkung). Insbesondere folgt damit $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$). Schreibt man Elemente von V bzgl. einer geeigneten Basis $\{e_i | i=1, \dots, n\}$ als Vektoren und bezeichnet mit T die Transposition, dann gibt es eine Matrix Φ über dem

Ring Δ_p , so daß für $v, w \in V$

$$\varphi(v, w) = v^T \Phi w, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & h_1 & & \\ -h_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & h_k \\ & & & -h_k & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

wobei $h_i \in \Delta_p$ und man sogar annehmen kann $h_i = p^{n_i}$ und $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ (vergl. Newman [22; Th. IV, 1]). Die Zahlen n_i nennen wir die Strukturkonstanten von G .

Die Möglichkeit $h_i \neq 1$ zu wählen, drückt die Existenz von zu J_p isomorphen Untergruppen von J_p aus. Für $x \in G$ kann nämlich

$[x, G]$ eine echte Untergruppe von Z sein; in der Tat, wenn $\bar{x} = e_i$, so ist $[x, G] = \varphi(e_i, V) = p^{n_i} \cdot Z$.

3) InnG

Für $c_g \in \text{InnG}$ ist $(-1+c_g)(x) = \varphi(\bar{x}, \bar{g})$, also wenn $\bar{x}_i = e_i$ ist, gilt $(-1+\text{InnG})(x_i) = \varphi(e_i, V) = p^{n_i} \cdot Z$. Unter dem Isomorphismus $\text{Hom}(V, Z) \rightarrow \prod_n J_p$, der jedem Homomorphismus die Bilder der Basis zuordnet, wird $(-1+\text{InnG})$ auf $\prod_{i=1}^k (p^{n_i} J_p)^2$ abgebildet. Beachtet man schließlich noch $\text{Stab } Z \cong \text{Hom}(V, Z)$ und (unter demselben Isomorphismus) $\text{InnG} \cong (-1+\text{InnG})$, so erkennt man

$$\text{Stab } Z / \text{InnG} = \prod_{i=1}^k (p^{n_i} J_p)^2, \text{ aber } \text{InnG} \cong \text{Stab } Z \cong \prod_n J_p$$

4) Faktorisierung von G

Da J_p projektiv ist in der Klasse der pro- p -Gruppen läßt sich G als Produkt $G = H_n \dots H_0$ schreiben mit Untergruppen $H_i \cong J_p$ ($i=0, \dots, n$) und $H_0 = Z$. Weiterhin ist $G \approx H_n \times \dots \times H_0$. Jedes Element $x \in G$ läßt sich stetig und eindeutig darstellen:

$$(*) \quad x = x_n + \dots + x_0 \quad (x_i \in H_i)$$

Man beachte aber, daß diese Darstellung von einer Basis von V abhängt, anders ausgedrückt: zu jeder Basis existiert eine solche Zerlegung. Durch $(*)$ ist ein stetiger Schnitt $\sigma: V \rightarrow G$ und eine stetige Abbildung $G \rightarrow Z$ definiert (vergl. die Exponentialfunktion in III § 5). Sei $\{e_i | i=1, \dots, n\}$ Basis von V und $a_i := \sigma(e_i)$, so können wir statt $(*)$ auch schreiben $x = \lambda_n a_n + \dots + x_0$ ($\lambda_i \in \Delta_p$).

Sei wieder $\Psi: \text{Aut } G \rightarrow \text{Aut } V$ der stetige Homomorphismus (siehe III § 5) und $S := \{\bar{\alpha} \in \text{Aut } V | \varphi(\bar{\alpha}v, \bar{\alpha}w) = \alpha' \varphi(v, w) \text{ für alle } v, w \in V \text{ und einer Einheit } \alpha' \text{ aus } \Delta_p\}$. Dann ist

5) $\Psi(\text{Aut}G) = S, \text{Ker } \Psi = \text{Stab}Z$:

Zuerst soll $\text{Ker } \Psi$ bestimmt werden. Offensichtlich ist $\text{Stab}Z \leq \text{Ker } \Psi$. Ist andererseits $\Psi(\alpha) = \bar{\alpha} = 1_V$ für $\alpha \in \text{Aut}G$, so ist für $z = [x, y] \in Z$ auch $\alpha(z) = \varphi(\bar{\alpha}(x), \bar{\alpha}(y)) = [x, y] = z$, d.h. α zentralisiert die von den Kommutatoren erzeugte Untergruppe G' von Z . Automorphismen von $Z \cong J_p$, die eine nichttriviale Untergruppe zentralisieren, aber sind schon gleich der Identität. Somit ist $\text{Stab}Z = \text{Ker } \Psi$.

Im $\Psi \leq S$ folgt sofort aus $[\alpha(x), \alpha(y)] = [x, y]$ für $x, y \in G$, $\alpha \in \text{Aut}G$. Sei also $\bar{\alpha} \in S$ gegeben und α' die dazugehörige Einheit. Sei $x \in G$ in der Darstellung $x = \lambda_n a_n + \dots x_0$ ($\lambda_i \in \Delta_p$) gegeben und $b_i := \sigma \bar{\alpha}(\bar{a}_i)$ ($i=1, \dots, n$), dann definiere

$$\alpha : x \rightarrow \lambda_n \cdot b_n + \dots \lambda_1 \cdot b_1 + \alpha' x_0$$

Diese Definition ist sinnvoll, da in G eine Potenzierung (in additiver Schreibweise: Multiplikation) mit Elementen aus Δ_p nicht nur erlaubt, sondern sogar stetig ist (siehe Definition von pro- p -Gruppe).

$$\alpha(x+x') = (\lambda_n + \lambda'_n) b_n + \dots \alpha' \left(\prod_{i < j} \varphi(\lambda_i \bar{a}_i, \lambda'_j \bar{a}_j) + x_0 + x'_0 \right)$$

$$\alpha(x) + \alpha(x') = \lambda_n b_n + \lambda'_n b_n + \dots \prod_{i < j} \varphi(\lambda_i \bar{b}_i, \lambda'_j \bar{b}_j) + \alpha' x_0 + \alpha' x'_0$$

Die Gleichheit beider Ausdrücke folgt direkt aus

$$\varphi(\bar{b}_i, \bar{b}_j) = \varphi(\bar{\alpha} \bar{a}_i, \bar{\alpha} \bar{a}_j) = \alpha' \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$$

α ist injektiv, da $\alpha' \neq 0$ und $\bar{\alpha}$ injektiv ist; α ist auch surjektiv, denn bzgl. der Basis $\{\bar{b}_i \mid i=1, \dots, n\}$ von V läßt sich jedes Element $y \in G$ darstellen als

$y = \lambda_n b_n + \dots \lambda_1 b_1 + y_0 = \alpha(x)$, wenn man $y_0 = \alpha' x_0$ gewählt hat.

α ist homöomorph, denn G ist sowohl zu $H_n \times \dots \times H_0$ homöomorph, als auch zu $H'_n \times \dots \times H'_0$, wenn letzteres die Zerlegung bzgl. der Basis $\{\bar{b}_i | i=1, \dots, n\}$ darstellt. Somit ist also $\Psi(\text{Aut}G) = S$.

Bemerkung:

Für $p \neq 2$ ist Δ_p durch 2 teilbar und man hätte analog zu III § 5 einen Liering (über Δ_p) zu G und eine Exponentialfunktion konstruieren können.

Bevor wir die Gruppe S analysieren, wollen wir zeigen, daß Ψ nicht nur stetig, sondern auch ein topologischer Homomorphismus ist. Dazu genügt es zu zeigen:

6) AutG ist kompakt:

Wir beweisen dies mit Hilfe des Satzes von Ascoli in der Form von Grosser-Loos-Moskowitz [8 ; Satz 1.7]. Nach diesem Satz ist $\text{Aut}G$ genau dann kompakt, wenn die Bahnen der Automorphismen relativ kompakt sind und kleine charakteristische Untergruppen existieren. Für die kompakte Gruppe G ist offenbar nur die zweite Bedingung zu zeigen:

Für $A \subset G$ definiere $A^{p^k} := \{x \in G \mid x = p^k a, \text{ für ein } a \in A\} \quad (k \in \mathbb{N})$.

$$U_{p^k} := \begin{cases} G^{p^k} & \text{falls } p \neq 2 \\ G^{p^k} \cdot 2^{p^{k-1}} & \text{falls } p = 2 \end{cases}$$

Wir zeigen, daß U_{p^k} Untergruppe ist. Seien $x_i \in U_{p^k} \quad (i=1,2)$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Fall } p \neq 2: \quad x_1 - x_2 &= p^k y_1 - p^k y_2 = p^k (y_1 - y_2) + \sum_{i=1}^{p^k-1} [-y_2, y_1] \\ &= p^k (y_1 - y_2) + p^k \left(\frac{p^k-1}{2} [y_1, y_2] \right) \\ &= p^k \left(y_1 - y_2 + \frac{p^k-1}{2} [y_1, y_2] \right) \in U_{p^k} \\ &\text{denn } p^{k-1} \text{ ist ungerade.} \end{aligned}$$

$$2. \text{ Fall } p = 2: x_1 - x_2 = (v^k y_1 + p^{k-1} z_1) - (p^k y_2 + p^{k-1} z_2)$$

mit $v_i \in G$ und $z_i \in Z$ für $i=1,2$.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= p^k (y_1 - y_2) + (p^{k-1} z_1 - p^{k-1} z_2 + \sum_{i=1}^{p^{k-1}} [y_1, y_2]) \\ &= p^k (y_1 - y_2) + p^{k-1} (z_1 - z_2 + \frac{p^k}{2} [y_1, y_2]) \in U_{\mathbb{F}}^k \\ &\text{denn } p^k \text{ ist gerade.} \end{aligned}$$

Die Untergruppen U_p^k ($k \in \mathbb{N}$) sind charakteristisch und da

$\frac{G}{U_p^k}$ endlich ist, auch offen. Da $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_p^k = 0$ ist, erfüllen sie die

Voraussetzungen des Ascoli-Satzes und $\text{Aut } G$ ist kompakt.

7) Die Gruppe $S = \frac{\text{Aut } G}{\text{Stab } Z}$:

Lemma (4.8): Jeder abelsche Normalteiler von S wirkt skalar

auf V , d.h. durch $v \rightarrow \mu v$ mit einer Einheit $\mu \in \Delta_p$.

Beweis:

Man wähle eine Basis $\{e_i \mid i=1, \dots, n\}$ von V , so daß die Bilinearform φ durch die Matrix $\underline{\Phi}$ aus (1) dargestellt wird und identifiziere Automorphismen $\bar{a} \in \text{Aut } V$ mit Matrizen $A = (a_{ij})$ bzgl. dieser Basis. Die Definitionsgleichung für $A \in S$ lautet dann

$$A^T \underline{\Phi} A = \lambda \underline{\Phi} \quad \text{für ein } \lambda \in \text{Aut } J_p \quad (2)$$

a) Ein Paar (i, j) mit $1 \leq i, j \leq n$ heiße adäquat, wenn $|i-j| = 1$ und $i+j \equiv 3 \pmod{4}$. Diese Relation ist symmetrisch, transitiv und liefert eine Partition von $\{1, \dots, n\}$ in adäquate Paare $(1,2), (3,4), \dots, (n-1,n)$. Schreibt man $\underline{\Phi} = (\varphi_{ij})$ so ist $\varphi_{ij} \neq 0$ genau dann, wenn (i, j) adäquat ist.

Sei $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ die kanonische Basis des $n \times n$ Matrizenringes über Δ_p . Wir zeigen, daß die Transvektionen $1 + E_{ij}$ in S liegen, falls (i, j) adäquat ist:

$$(1 + E_{ji}) \Phi(1 + E_{ij}) = \Phi + (\delta_{kj} \varphi_{im} + \delta_{mj} \varphi_{ki} + \delta_{kj} \varphi_{mj} \varphi_{ii})_{k,m}$$

Der letzte Summand verschwindet, da $\varphi_{ii} = 0$. Ist φ_{im} (bzw. φ_{ki}) nicht Null, also (i, m) (bzw. (k, i)) adäquat, dann folgt - da auch (i, j) adäquat ist - $m = j$ (bzw. $k = j$). Aus $\delta_{kj} \varphi_{im} \neq 0$ (bzw. $\delta_{mj} \varphi_{ki} \neq 0$) folgt also $m = j = k$ (bzw. $k = j = m$) und $\delta_{kj} \varphi_{im} = \varphi_{ij} = -\varphi_{ji} = -\delta_{mj} \varphi_{ki}$. Damit erfüllt $1 + E_{ij}$ Bedingung (2).

b) Sei $A = (a_{ij})$ aus einem abelschen Normalteiler von S , dann liegt auch $C = (1 - E_{ij}) A (1 + E_{ij})$ in diesem, wenn (i, j) adäquat ist. Also muß $AC = CA$ sein. Wir berechnen zunächst C :

$$C = A + (a_{ki} \delta_{mj} - a_{jm} \delta_{ki} - a_{ji} \delta_{ki} \delta_{mj})_{k,m} \quad (3)$$

$$AC = A^2 + \left(\sum_s (a_{rs} a_{si} \delta_{lj}) - a_{ri} a_{jl} - a_{ri} a_{ji} \delta_{lj} \right)_{r,l}$$

$$CA = A^2 + \left(a_{ri} a_{jl} - \sum_t (a_{jt} a_{tl} \delta_{ri}) - a_{ji} a_{jl} \delta_{ri} \right)_{r,l}$$

Aus $AC = CA$ folgt daher für $l \neq j$ und $r \neq i$

$$a_{ri} a_{jl} = 0 \quad (4)$$

Man setze jetzt A in (2) ein:

$$A^T \Phi A = \left(\sum_{s,m} a_{sk} \varphi_{sm} a_{ml} \right)_{k,l} = \lambda \Phi = (\lambda \varphi_{kl})_{kl} \quad (5)$$

Annahme: $a_{jl} \neq 0$ für ein $l \neq j$, dann ist wegen (4): $a_{ri} = 0$ für alle $r \neq i$ und $a_{ii} \neq 0$, denn A kann nicht singular sein.

(5) impliziert dann für $l = i$

$$\sum_s a_{sk} \varphi_{si} a_{ii} = \lambda \varphi_{ki} \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n$$

Da (j, i) adäquat ist, kann (k, i) dies nur für $k = j$ sein,

also ist $\sum_s a_{sk} \varphi_{si} = a_{jk} \varphi_{ji} = 0$ für alle $k \neq j$, wes-

halb $a_{jk} = 0$ ist, im Widerspruch zur Annahme.

Da jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ in einem adäquaten Paar erscheint, ist $a_{j1} = \delta_{j1}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, d.h. A ist Diagonalmatrix. A war ein beliebiges Element des abelschen Normalteilers, also hat auch C Diagonalgestalt. Betrachtet man den (i, j) -Term von C (siehe (3)), so lautet dieser

$$a_{ij} + (a_{ii} - a_{jj} - a_{ji}) = a_{ii} - a_{jj} = 0 \quad (\text{denn } i \neq j)$$

Für alle adäquaten Paare (i, j) ist also $a_{ii} = a_{jj}$. In (5) mit $l = j$ und $k = i$ ergibt dies:

$$\lambda \varphi_{ij} = \sum_{s,m} a_{si} \varphi_{sm} a_{mj} = a_{ii} \varphi_{ij} a_{jj} = a_{ii}^2 \varphi_{ij}$$

woraus $\lambda = a_{ii}^2$ folgt und die Gleichheit aller Diagonalelemente von A. Damit ist (4.8) bewiesen. $\square$

Bemerkung:

Obwohl nach (4.8) Automorphismen, die auf V eine skalare Abbildung induzieren, auf Z durch Multiplikation mit einem Quadrat aus der Einheitengruppe von Δ_p wirken, gibt es für jede Einheit $\lambda \in \Delta_p$ einen Automorphismus von G, der λ auf Z induziert, z.B. $\alpha \in \text{Aut} G$ mit $\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

Es ist nun ein Leichtes zu beweisen, daß

8) $\text{Fit}(\text{Aut} G) = \text{Stab} Z$ und $Z(\text{Aut} G) = 1$:

Nach Lemma (4.8) ist $Z(S) \leq \{ \mu \cdot 1_V \mid \mu \text{ Einheit in } \Delta_p \}$ und - wie man sofort nachprüft - gilt sogar Gleichheit. Da es in nilpotenten, nicht-abelschen Gruppen stets abelsche Normalteiler gibt, die das Zentrum echt enthalten (nehme z.B. $x \in Z_2(G) \setminus Z(G)$ und betrachte das Erzeugnis von x und $Z(G)$), ist hier $\text{Fit}(S) = Z(S)$.

Sei $\gamma \in \text{Stab} Z$, d.h. $\gamma = 1 + \varphi_Y \pi$ mit $\varphi_Y \in \text{Hom}(V, Z)$ ($\pi: G \rightarrow V$) und $\alpha \in \text{Aut} G$, so daß $\bar{\alpha} = \mu \cdot 1_V$ und deshalb $\alpha|_Z = \mu^2$

(μ Einheit in Δ_p). Dann gilt für $x \in G$

$$\alpha \gamma \alpha^{-1}(x) = x + \alpha \varphi_Y \pi \alpha^{-1}(x) = x + \mu^2 \varphi_Y (\mu^{-1} \bar{x}) = x + \mu \varphi_Y(\bar{x})$$

und wenn man berücksichtigt, daß die Multiplikation mit Elementen aus Δ_p auf dem Zentrum ein Homomorphismus ist, dann lautet der Kommutator:

$$[\gamma, \alpha^{-1}](x) = x + \mu \varphi_Y(\bar{x}) - \varphi_Y(x) = x + (\mu - 1) \varphi_Y(x) \quad (6)$$

Aus (6) schließt man, daß $\alpha \notin \text{Fit}(\text{Aut} G)$ und deshalb

$\text{Fit}(\text{Aut}) = \text{Stab} Z$. Ebenfalls aus (6) folgt, daß $Z(\text{Aut} G) = 1$, denn $Z(\text{Aut} G) \leq \text{Fit}(\text{Aut} G)$.

Um auch für $\text{Out} G := \text{Aut} G / \text{Inn} G$ die Fittinguntergruppe zu bestimmen, muß man den größten nilpotenten Normalteiler N von S suchen, für den ein $c \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$[\dots [\gamma, \alpha_1] \alpha_2, \dots, \alpha_c] \in \text{Inn} G \quad (7)$$

wenn $\gamma \in \text{Stab} Z$ und $\bar{\alpha}_i \in N$ für $i = 1, \dots, c$, denn $\text{Stab} Z / \text{Inn} G$

ist ein abelscher Normalteiler in $\text{Aut} G$. Da nur $N \leq Z(S)$ in

Frage kommt, ist nach (6) die Bedingung (7) gleichbedeutend

$$\text{mit } \prod_{i=1}^c (u_i - 1) \varphi_Y \in -1 + \text{Inn} G \quad (8)$$

wobei $\gamma = 1 + \varphi_Y \pi$ und $\bar{\alpha}_i = \mu_i \cdot 1_V$ ist. Dies gilt aber ge-

nau dann für alle $v \in \text{Stab} Z$, wenn $\prod_{i=1}^c (u_i - 1) \in \mathbb{F}^{n_k} J_p$, denn n_k

ist die größte der Strukturkonstanten von G (siehe 3). Des-

$$\text{halb gilt: } N = \{ \mu \cdot 1_V \mid u = 1 + p \cdot \lambda, \lambda \in \Delta_p \} \cong$$

$$= \text{Gruppe der Einseinheiten in } \Delta_p \cong J_p.$$

$\text{Fit}(\text{Out} G)$ ist somit eine zerfallende Erweiterung von

$\text{Stab} Z / \text{Inn} G$ mit $N \cong J_p$ und $c_1(\text{Fit}(\text{Out} G)) = c = p^{n_k}$.

Wir fassen zusammen:

Satz 9: Sei G eine extraspezielle torsionsfreie und kompakte pro- p -Gruppe mit $r(G/Z(G)) = n$. Dann gilt:

i) $n = 2k$ gerade

ii) $\text{StabZ}/\text{InnG} \cong \prod_{i=1}^k (\mathbb{Z}_{p^{n_i}})^2$, $\text{StabZ} \cong \text{InnG} \cong \prod_n J_p$ ($n_i \in \mathbb{N}$)

iii) $\text{AutG}/\text{StabZ} = \left\{ \alpha \in \text{GL}(n, \Delta_p) \mid \alpha^T \Phi \alpha = \lambda \alpha \text{ mit} \right.$
einer Einheit $\lambda \in \Delta_p \left. \right\} = S$, wobei

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & p^{n_1} & & \\ -p^{n_1} & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & p^{n_k} \\ & & & -p^{n_k} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. einer geeigneten Basis.}$$

iv) $\text{Fit}(\text{AutG}) = \text{StabZ}$

v) $Z(\text{AutG}) = 1$

vi) $\text{Fit}(\text{AutG}/\text{InnG}) \cong J_p \left[\prod_{i=1}^k (\mathbb{Z}_{p^{n_i}})^2 \right]$ und hat Klasse p^{n_k}

vii) AutG ist kompakt.

Literaturverzeichnis

- [1] BAER, R. Groups with abelian central quotient group,
Trans. Am. Soc. 44 (1938), S. 357-386 .
- [2] BRACONNIER, J. Sur les groupes topologiques localement
compacts, J. Math. Pures Appl. 27 (1948)
S. 1-85 .
- [3] DIEUDONNE, J. Sur les groupes classiques, Act. Sci. ind.
(1945) VI.
- [4] FUCHS, L. Infinite abelian groups, New York 1970
(vol.I), 1973 (vol.II).
- [5] FUCHS, L. On the structure of abelian p-groups,
Acta Math. Acad. Sci. Hungar 4 (1953),
S. 267-288 .
- [6] GASCHÜTZ, W. Kohomologische Trivialitäten und äußere
Automorphismen von p-Gruppen, Math.
Zeitschrift 88 (1965), S. 432-433.
- [7] GASCHÜTZ, W. Nichtabelsche p-Gruppen besitzen äußere
p-Automorphismen, Journal Algebra 4
(1966), S. 1-2 .
- [8] GROSSER, S. - LOOS, O. - MOSKOWITZ, M.
Über Automorphismengruppen lokal-kompakter
Gruppen und Derivationen von Lie-Gruppen,
Math.Zeitschrift 114 (1970), S. 321-331.
- [9] HEINEKEN, H. Automorphismen groups of torsion-free
nilpotent groups of class 2, Symposia Math.
17 (1976), S. 235-250.
- [10] HEWITT, E. - ROSS, K.A.
Abstract harmonic analysis I, New-York,
Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963 .

- [11] HOCHSCHILD, G. The automorphism group of a Lie group,
Trans.Amer.Math.Soc. 72 (1952),
S.206-216.

- [12] HOCHSCHILD, G. The structure of Lie groups, San
Francisco, London, Amsterdam 1965.

- [13] HOFMANN, H. Einführung in die Theorie der Liegruppen,
I + II, Tübingen 1963 (Vorlesungsskript).

- [14] HUMPHREYS, J.E. Introduction to Lie algebras and
representation theory, New York - Heidel-
berg - Berlin 1972.

- [15] IWASAWA, K. On some types of topological groups,
Ann. of Math. (2) 50, (1949), S.507-558.

- [16] KARGAPOLOV, M.I. - MERZLJAKOV, Ju.I.
Fundamentals of the theory of groups,
New York - Heidelberg - Berlin 1979.

- [17] KÖTHE, G. Topological vectorspaces I, Berlin -
Heidelberg - New York 1969.

- [18] KRULL, W. Zur Theorie der Gruppen mit Untergruppen-
topologie, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg
28 (1965), S. 50-97

- [19] KUROSH, A.G. The theory of groups, New York 1955
(vol.I), 1956 (vol.II).

- [20] MOORE, C.C. Extensions and low dimensional cohomology theory of locally compact groups,
I + II, Trans.Amer. Math. Soc. 113
(1964), S. 40-86.

- [21] MOORE, C.C. Group extensions and cohomology for locally compact groups, III + IV, Trans. Amer. Math. Soc. 221 (1976), S. 1-58.
- [22] NEWMAN, M. Integral matrices, New York, London 1972.
- [23] PONTRYAGIN, L.S. Topologische Gruppen, I, Leibzig 1957/58.
- [24] ROBINSON, D.S. Outer automorphisms of torsion-free nilpotent groups, (nicht veröffentlicht) 1978.
- [25] WANG, P.S. The automorphism group of a locally compact group, Duke Math. J. 36 (1969), S. 277-282.
- [26] ZALESSKII, A.E. A nilpotent p-group possesses an outer automorphism, Soviet Math. Dokl. 12 (1971), S. 227-230.
- [27] ZALESSKII, A.E. An example of a torsion-free nilpotent group having no outer automorphisms, Math. Notes 11 (1972), S. 16-19.

Lebenslauf

Am 7. Juni 1952 wurde ich als Sohn von Heinrich Albert und seiner Frau Betty Albert, geb. Durmann, in Nürnberg geboren.

Nach dem Besuch der Volksschule in Nürnberg von 1958 - 1963 trat ich im Herbst 1963 in das Dürer-Gymnasium in Nürnberg über, wo ich 1972 die Reifeprüfung ablegte.

Von 1972 bis 1973 leistete ich im Altersheim Freising meinen Zivildienst ab und begann im Wintersemester 1973/74 das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Erlangen-Nürnberg. Hier legte ich im Herbst 1975 das Vorexamen ab.

Vom Oktober 1977 bis August 1978 studierte ich Mathematik an der University of Warwick, England. Dabei hörte ich Vorlesungen der Professoren S.E. Stonehewer, J.A. Green und G. Lusztig und erwarb 1978 den Master of Science mit der Arbeit "Some applications of cohomology of the theory of infinite groups."

Zum Wintersemester 1978/79 kehrte ich nach Erlangen zurück und begann mich mit topologischen Gruppen zu beschäftigen. Während dieser Zeit hörte ich vor allem Vorlesungen der Herren Professoren P. Plaumann, K. Strambach und H. Wegener.

Seit dem Wintersemester 1979/80 bin ich als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg angestellt.

Erlangen, den 27.3.1981

Copy - Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131-26197